R. Katarzyniak/sem. zimowy 2008/2009

Logika dla informatyków – zadania pomocnicze

Zadanie 2.1. Zbadać, które spośród własności symetrii, przeciwsymetrii, zwrotności, przechodniości, spójności oraz równoważności posiadają następujące relacje $R \subseteq X \times X$, $X=\{a,b,c\}$

a) $R = \{<a,a>, <b,b>, <a,b>\}$
b) $R = \{<a,b>,<b,a>,<c,a>,<a,c>\}$
c) $R = \{<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,c>,<a,a>,<b,b>\}$

Zadanie 2.2. Zbadać, czy są przechodnie następujące relacje $R \subseteq X \times X$, $X=\{a,b,c\}$

a) $R = \emptyset$
b) $R = \{<a,b>\}$
c) $R = \{<a,b>, <a,c>\}$

Zadanie 2.3. Dane są trzy definicje spójności relacji $R \subseteq X \times X$:

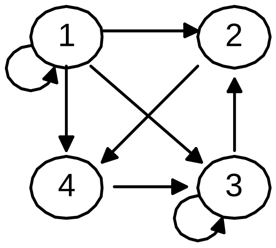
a) Relacja $R \subseteq X \times X$ jest relacją spójną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary obiektów $<x,y> \in X \times X$ spełniona jest formuła $<x,y> \in R \vee <y,x> \in R$
b) Relacja $R \subseteq X \times X$ jest relacją spójną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary obiektów $<x,y> \in X \times X$ spełniona jest formuła $<x,y> \in R \underline{\vee} <y,x> \in R$
c) Relacja $R \subseteq X \times X$ jest relacją spójną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary obiektów $<x,y> \in X \times X$ jeżeli $x \neq y$, to spełniona jest formuła $<x,y> \in R \vee <y,x> \in R$

gdzie spójniki $\vee$ oraz $\underline{\vee}$ definiowane są w następujący sposób:

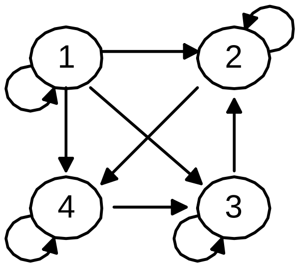
p	**q**	**$p \vee q$**	**$p \underline{\vee} q$**
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Zbadać, które z relacji binarnych przedstawionych poniższymi grafami są spójne w sensie definicji (a)-(c):

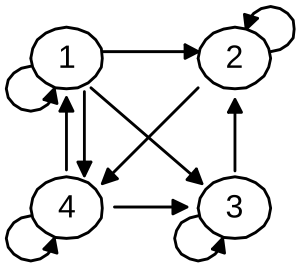
G1



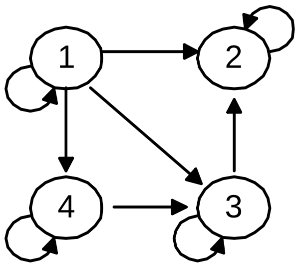
G2



G3



G4



Zadanie 2.4. Niech dana będzie relacja binarna $R \subseteq \{0,1,2,3,4\} \times \{0,1,2,3,4\}$, gdzie $\{0,1,2,3,4\}$ oznacza zbiór liczb oraz para liczb $<x,y> \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba x dzieli liczbę y bez reszty. Ustalić, którą spośród następujących cech posiada relacja R:

a) symetrii,
b) przeciwsymetrii,
c) zwrotności,
d) przechodniości,
e) spójności

Zadanie 2.5. Niech dana będzie relacja binarna $P \subseteq \check{R} \times \check{R}$, gdzie $\check{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych oraz para liczb $<x,y> \in \check{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $x + y = 2$. Ustalić, którą spośród następujących cech posiada relacja P:

a) symetrii,
b) przeciwsymetrii,
c) zwrotności,
d) przechodniości,
e) spójności
f) równoważności.

Zadanie 2.6. Niech dana będzie relacja binarna $P \subseteq \check{R} \times \check{R}$, gdzie $\check{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych oraz para liczb $<x,y> \in \check{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $x + y \geq 1$. Ustalić, którą spośród następujących cech posiada relacja P:

a) symetrii,
b) przeciwsymetrii,
c) zwrotności,
d) przechodniości,
e) spójności
f) równoważności.

Zadanie 2.7. Wskazać stwierdzenia prawdziwe:

a) Nie jest prawdą, że suma dwóch relacji symetrycznych $P \subseteq X \times X$ i $Q \subseteq X \times X$ określonych na zbiorze X jest symetryczna na zbiorze X.
b) Prawdą jest, że jeżeli relacja $R \subseteq X \times X$ jest przechodnia na zbiorze X i $R \subseteq S \subseteq X \times X$, to S jest relacją przechodnią na zbiorze X.

Zadanie 2.8. Niech dane będą relacje $R_1 \subseteq X \times X$, $R_2 \subseteq X \times X$, gdzie X pewien zbiór. Relację R_2 nazywamy rozszerzeniem relacji R_1 wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $R_1 \subset R_2$. Zbadać, czy każdą relację $R \subseteq X \times X$ można rozszerzyć do pewnej relacji:

a) symetrycznej
b) przeciwsymetrycznej
c) zwrotnej
d) przeciwzwrotnej
e) przechodniej

Zadanie 2.9. Niech C oznacza zbiór liczb całkowitych i niech $x \in C$, $y \in C$. Przyjmujemy, że $<x,y> \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x-y \in C$. Czy relacja R jest relacją równoważności?

Zadanie 2.10. Niech X oznacza zbiór trójkątów równobocznych na płaszczyźnie i niech $x \in X$, $y \in X$. Przyjmujemy, że $<x,y> \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy x i y mają równe pola. Czy relacja R jest relacją równoważności?

Zadanie 2.11. Niech dany będzie zbiór liczb naturalnych $Z=\{1,2,3,4,5\}$. Dla dowolnego $x \in Z$ oraz dowolnej liczby naturalnej $w \neq 0$ przyjmijmy, że symbol mod(x,w) oznacza resztę z dzielenia x przez w. Niech dane będą następujące relacje binarne:

R1) Relacja $R1 \subseteq Z \times Z$ taka, że para $<x,y> \in R1$ wtedy i tylko wtedy, gdy mod(x,1)=mod(y,1).

tj. liczba x i liczba y jest w relacji R1 wtedy i tylko wtedy, gdy reszta z dzielenia liczby x przez 1 równa jest reszcie z dzielenia liczby y przez 1.

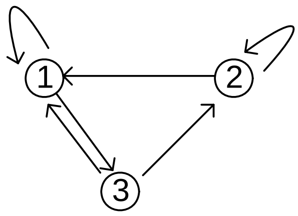
R2) Relacja $R2 \subseteq Z \times Z$ taka, że para $<x,y> \in R2$ wtedy i tylko wtedy, gdy mod(x,2)=mod(y,2).
R3) Relacja $R3 \subseteq Z \times Z$ taka, że para $<x,y> \in R3$ wtedy i tylko wtedy, gdy

mod(x,6)=mod(y,6).

Udowodnić, że każda z powyższych relacji jest relacją równoważności. Każdą z relacji przedstawić w następujący sposób:

a) za pomocą grafu skierowanego Gi, i=1,2,3.
b) za pomocą macierzy binarnej Mi, i=1,2,3.
c) za pomocą zbioru par $Ri \subseteq Z \times Z$, i=1,2,3.
d) jako podział Pi zbioru Z, i=1,2,3.

Zadanie 2.12. Niech dana będzie relacja binarna reprezentowana grafem:



Ustalić, czy relacja ta posiada własność $\forall x \forall y\ (\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,y\rangle \notin R) \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$!