

Logika dla informatyków

LISTA ZADAŃ NR 1

1. Podać elementy następujących zbiorów:
 - a) $\{a\}$,
 - b) $\{\{a\}\}$,
 - c) $\{\{a,b\},\{a\}\}$,
 - d) $\{\{\{a\}\},\{a\},a\}$,
 - e) $\{x \in \mathbb{N}_0 \mid x^2 < 7\}$, gdzie \mathbb{N} - zbiór liczb naturalnych
 - f) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$,
 - g) $\{x \in \mathbb{Q} \mid (x + 1)^2 < 0\}$ gdzie \mathbb{Q} - zbiór liczb wymiernych
2. Niech A, B, C, D będą różne od zbioru pustego. Jakie zależności powinny zachodzić pomiędzy nimi, aby zachodziły następujące równości:
 - a) $\{B,C\} = \{B,C,D\}$,
 - b) $\{\{A,B\},C\} = \{\{A\},C\}$,
 - c) $\{\{A,B\},\{D\}\} = \{\{A\}\}$,
 - d) $\{\{A,\emptyset\},B\} = \{\{\emptyset\}\}$.
3. Wykazać, że równość zbiorów $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ oraz $b = d$.
4. Obliczyć $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ dla następujących zbiorów A i B :
 - a) $A = \{\{a,b\},c\}, B = \{c,d\}$
 - b) $A = \{\{a,\{a\}\},a\}, B = \{a,\{a\}\}$
5. Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:
$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$
$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$$
6. Zbudować zbiory potęgowe dla następujących zbiorów:
 - a) $A = \{1, 2\}$
 - b) $B = \{+, -, 0\}$
 - c) $C = \{\{a,b\}, c, \{a\}\}$
7. Udowodnić, że $\text{card}(2^A) = 2^{\text{card}(A)}$, jeżeli A jest zbiorem skończonym (indukcyjnie).
8. Dowieść, że $A \cap B$ jest największym zbiorem zawartym równocześnie w A i w B , tj. takim, że każdy zbiór X zawarty w A i w B jest zawarty w $A \cap B$.
9. Dowieść, że $A \cup B$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym równocześnie A i B , tj. takim, że każdy zbiór X zawierający A i B zawiera również $A \cup B$.
10. Sprawdzić i uzasadnić, które z podanych poniżej równości zachodzą dla dowolnych zbiorów A, B, C i D :
 - a) $(A \setminus B) \cup B = A$
 - b) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
 - c) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$
 - d) $(A \cup B) \cap B = B$

11. Udowodnić, że $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ Dla dowolnych zbiorów A i B.
12. Podać przykłady dwóch zbiorów, dla których:
 - a) suma jest równa iloczynowi
 - b) suma jest podzbiorem iloczynu
 - c) różnica jest równa iloczynowi
 - d) różnica jest równa sumie
13. Udowodnić następujące równości:
 - a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 - b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
14. Podać przykład dwóch nieskończonych zbiorów posiadających jedną z następujących własności:
 - a) ich różnica jest skończonym zbiorem
 - b) ich różnica symetryczna jest nieskończonym zbiorem
 - c) ich iloczyn jest skończonym zbiorem
 - d) ich iloczyn jest nieskończonym zbiorem
 - e) ich suma jest skończonym zbiorem