

**LISTA ZADAŃ NR 3**

1. Pokazać, że jeśli  $R$  jest relacją równoważności na zbiorze  $A$  to jej klasy abstrakcji mają następujące własności:

a)  $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$

b)  $\langle a, b \rangle \in R$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $[a]_R = [b]_R$

c)  $\langle a, b \rangle \notin R$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ .

2. Niech  $f$  będzie funkcją przekształcającą zbiór  $R$  wszystkich liczb rzeczywistych w rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru  $R$  (tj. zbiór  $2^R$ ) określoną następującym wzorem:

$$f(t) = \{x: x \in R \text{ i } x \leq |t|\}$$
 dla każdego  $t \in R$ .

Oblicz  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(t^2+1)$ ,  $f(f(0))$ .

3. Niech  $f: R \rightarrow R$  będzie funkcją określoną wzorem  $f(x) = -2x+4$ . Znaleźć funkcję odwrotną do tej funkcji.

**Uwaga:** Funkcję  $g: Y \rightarrow X$  nazywamy funkcją odwrotną do funkcji  $h: X \rightarrow Y$  jeżeli  $Y=f(X)$  (zbiór argumentów funkcji  $g$  jest zbiorem wartości funkcji  $h$ ),  $X=g(Y)$  (zbiór argumentów funkcji  $h$  jest zbiorem wartości funkcji  $g$ ) i dla każdego  $x \in X$  zachodzi:

$$g(h(x)) = x.$$

4. Ile jest funkcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  na siebie i takich, że  $f(1)=3$ ? Uogólnić ten wynik dla zbioru  $\{1,2,\dots,n\}$  i takich funkcji  $f$ , że  $f(x_i)=y_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$  oraz  $k \leq n$ .
5. Udowodnić, że jeśli  $A$  jest zbiorem  $k$ -elementowym i  $B$  jest zbiorem  $n$ -elementowym,  $k \leq n$ , to istnieje  $n(n-1)\dots(n-k+1)$  funkcji różnowartościowych z  $A$  w  $B$ .
6. Udowodnić, że w zbiorze  $[0,2]$  (jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie mniejszych niż 0 i nie większych niż 2) nie istnieje taka relacja równoważności, której klasami abstrakcji byłyby zbiory:  $[0,1]$ ,  $[1,4/3]$  i  $[1,2]$ .
7. Podaj przykłady relacji binarnych  $R$  i  $S$ , dla których oblicz wielkości  $\text{dom}(R)$ ,  $\text{dom}(S)$ ,  $\text{ran}(R)$ ,  $\text{ran}(S)$ , ich złączenie i złożenie.
8. Zdefiniować systemy relacyjne opisujące następujące typy danych:
- a) Boolean
  - b) Integer
  - c) Real
  - d) String
  - e) **set of**  $A$ , gdzie  $A$  jest nazwą typu o zbiorze wartości  $\{1,2,\dots,n\}$