

Logika dla informatyków

1. Co to jest logika?

Formalny aparat służący do wnioskowania.

Przykład: (omylnego Greka)

- Turing jest człowiekiem
- Sokrates jest człowiekiem
- Sokrates jest Grekiem
- Każdy człowiek jest omylny

Wniosek: *Istnieje omylny Grek.*

Logika składa się z dwóch elementów:

- **Język formalny:** zbiór zdań budowanych za pomocą symboli
- **Semantyka:** sposób nadania tym zdaniom znaczenie

Przykład:

- Zdanie języka formalnego: $X \Rightarrow Y$
- Semantyka: dla wartości *true* dla X i *false* dla Y zdanie ma wartość *false*.

2. Dlaczego „Logika dla informatyków”?

- Narzędzia do przedstawiania i badania własności systemów informatycznych
- Narzędzia do zbudowania języków programowania
- Narzędzia do tworzenia baz danych i baz wiedzy

Skrótowe elementy logiki zdaniowej

1. Zdania logiczne

- symbole zmiennych zdaniowych: a, b, c, \dots
- spójniki logiczne: $\neg, \wedge, \vee, \Leftrightarrow, \Rightarrow$
- formuły logiczne:
 $(\neg a \wedge b) \Rightarrow c$

2. Semantyka

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Prawa logiki

$$(a \wedge b) \vee c \equiv (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

$$(a \vee b) \wedge c \equiv (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

4. Wybrane elementy teorii mnogości

1. Co to jest zbiór?

Nie ma definicji, jest tylko opis: *Zbiorem jest kolekcja elementów*

2. Oznaczenia

- $X = \{1, 2, 3\}$; $Y = \{\text{pon, wt, śr, czw, pt, sob, nie}\}$
- \emptyset : zbiór pusty (nie zawiera żadnego elementu)
- \mathbb{N} : zbiór liczb naturalnych
- \mathbb{R} : zbiór liczb rzeczywistych
- \mathbb{Z} : zbiór liczb całkowitych
- zbiór jest skończony lub nieskończony
- $\{1, 2, 3\}$
- $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$
- $\{\{1\}\} \neq \{1\}$
- $\emptyset \neq \{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$
- Przynależność elementu do zbioru:
 $x \in X$ (x jest elementem zbioru X)

- Podzbiór:

$X \subseteq Y$ (zbiór X jest *podzbiorem* zbioru Y , tj. każdy element zbioru X należy do Y)

- Podzbiór właściwy:

$X \subset Y$ (zbiór X jest *właściwym podzbiorem* zbioru Y , tj. każdy element zbioru X należy do Y oraz $X \neq Y$)

- Czy:

$$1 \in \{1\} ?$$

$$\emptyset \in \{\emptyset\} ?$$

$$\emptyset \in \{\{\emptyset\}\} ?$$

$$1 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} ?$$

$$\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} ?$$

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\} ?$$

$$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} ?$$

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\} ?$$

$$\{1, 2\} \subset \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} ?$$

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset\} ?$$

3. Sposoby określenia zbioru

- przez wyliczanie elementów:

+ Tydzień = {pon, wt, śr, czw, pt, sob, nie}

+ Płeć = {K, M}

- przez podanie własności elementów:

+ P – zbiór liczb parzystych

$P = \{x: x \in \mathbb{N} \text{ oraz } x \text{ jest liczbą podzielną przez } 2\}$

+ Miłośnicy_logiki = {x: x jest studentem I roku i
lubi logikę}

- przez podanie algorytmu (sposobu) wyliczania kolejnych elementów:

$X = \{x_1, x_2, \dots\}$ gdzie

$x_1 = 1, x_i = 2 \cdot x_{i-1}$ dla $i = 2, 3, \dots$

Paradoks fryzjera:

Miasto X , fryzjer F mieszkający i pracujący w X .

F definiuje zbiór swoich klientów następująco:

Klientem jest każdy mieszkaniec miasta X , który sam siebie nie goli.

$Klient = \{x: x \text{ mieszka w } X \text{ i } x \text{ sam siebie nie goli}\}$

Pytanie:

$F \in X$ czy $F \notin X$?

4. Algebra zbiorów

Operacje: suma, iloczyn, różnica, różnica symetryczna