Zbiór potęgowy

- Dla danego zbioru S zbiór wszystkich jego podzbiorów oznaczany symbolem 2^S.

- Dowolny podzbiór R zbioru 2^S nazywa się ***rodziną zbiorów*** względem S.

- Jeśli S jest n-elementowym zbiorem, to 2^S ma 2^n elementów.

- Ogólnie dla dowolnego skończonego zbioru A:

$$card(2^A) = 2^{card(A)}$$

gdzie ***card(A)*** reprezentuje liczność zbioru A.

Twierdzenie Cantora

Dla każdego (skończonego albo nieskończonego) zbioru S, jego zbiór 2^S jest większej mocy
(ma "więcej elementów").

Przykłady

- $2^{\{1,2,3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
- $2^{2^{\{a,b\}}}$ **= ?**

- $2^{2^{\{a,b\}}} = \{\varnothing,$
  $\{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\},$
  $\{\varnothing, \{a\}\}, \{\varnothing, \{b\}\}, \{\varnothing, \{a,b\}\},$
  $\{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a,b\}\}, \{\{b\}, \{a,b\}\},$
  $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}\}, \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}\}, \{\varnothing, \{b\}, \{a,b\}\},$
  $\{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
  $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}\}$
-

Relacje

Relacja binarna R określona na zbiorach A oraz B jest podzbiorem produktu kartezjańskiego $A \times B$, czyli $R \subseteq A \times B$.

Jeżeli A = B, to mówimy o relacji binarnej na A.

Jeżeli para <a,b> jest elementem relacji binarnej R, to piszemy <a,b>$\in$R

Czasem zamiast <a,b>$\in$R piszemy (w tzw. notacji *infiksowej* albo *wrostkowej*) aRb.

A = {a,b}   B = {1,2,3}

A x B = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)}

B x A = {(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)}

R $\subseteq$ A x B: relacja na A i B.

R = {(a,1), (a,2), (a,3)}

R = A x B – pełna relacja

R = $\varnothing$ - pusta relacja

Jeżeli R jest relacją binarną na A×B, to jej *dziedziną* jest zbiór:

$dom(R) = \{a \in A \mid \text{istnieje } b \in B \text{ taki, że } \langle a,b \rangle \in R\}$

R = {(a,1), (a,2), (a,3)}   A = {a,b}   B = {1,2,3}

dom(R) = {a}

a jej *przeciwdziedziną* jest zbiór:

$ran(R) = \{b \in B \mid \text{istnieje } a \in A \text{ taki, że } \langle a,b \rangle \in R\}$

ran(R) = {1, 2, 3}

Szczególne rodzaje relacji:

- Relacja pusta: $R = \emptyset$

$dom(R) = \emptyset$, $ran(R) = \emptyset$

- Relacja pełna $R = \{\langle a,b \rangle \mid a \in A, b \in A\} = A \times A$

$dom(R) = A$, $ran(R) = A$

Wybrane własności relacji (binarnej) na A:

- *zwrotność* jeżeli $<a,a> \in R$ dla każdego $a \in A$

A = {a,b}
R = {(a,a), (b,a)} – niezwrotna
R = {(a,a), (b,b), (a,b)} – zwrotna
R = ∅ - nie
R = A x A - zwrotna

- *przeciwzwrotność* jeżeli $<a,a> \notin R$ dla każdego $a \in A$

A = {a,b}
R = {(a,a), (b,a)} – nie przeciwzwrotna
R = {(a,a), (b,b), (a,b)} – nie przeciwzwrotna
R = ∅ - przeciwzwrotna
R = A x A – nie przeciwzwrotna

- *symetria* jeżeli $<a,b> \in R$, to również $<b,a> \in R$

A = {a,b}
R = {(a,a), (b,a)} – niesymetryczna
R = {(a,a), (b,b), (a,b)} – niesymetryczna
R = ∅ - symetryczna
R = A x A - symetryczna

- *przeciwsymetria* jeżeli $<a,b> \in R$, to $<b,a> \notin R$

A = {a,b}
R = {(a,a), (b,a)} – nie przeciwsymetryczna
R = {(a,a), (b,b), (a,b)} – nie przeciwsymetryczna
R = ∅ - przeciwsymetryczna

R = A x A - nie przeciwsymetryczna
- Jaka jest relacja, która jest i symetryczna i przeciwsymetryczna?
- Czy relacja zwrotna może być przeciwsymetryczna?
- Czy relacja przeciwzwrotna może być przeciwsymetryczna?

przechodniość   jeżeli $\langle a,b \rangle \in R$ oraz $\langle b,c \rangle \in R$, to $\langle a,c \rangle \in R$

A = {a,b}
R = {(a,a), (b,a)} – przechodnia
R = {(a,a), (b,b), (a,b)} – przechodnia
R = $\varnothing$ - przechodnia
R = A x A - przechodnia
R = {(a,a), (b,a), (a,b)} – nie przechodnia

- *spójność*   dla dowolnych $a,b \in A$, $a \neq b$, jest albo $\langle a,b \rangle \in R$ **albo** $\langle b,a \rangle \in R$

A = {a,b}
R = {(a,a), (b,a)} – spójna
R = {(a,a), (b,b), (a,b)} – spójna
R = $\varnothing$ - niespójna
R = A x A - niespójna
R = {(a,a), (b,a), (a,b)} –   niespójna

Relacja równoważności:
ma własności: *zwrotności, symetrii i przechodniości*.

Relacja równoważności R określona na zbiorze A wyznacza podział zbioru na tzw. klasy abstrakcji. Mianowicie, dla dowolnego elementu a zbioru A zdefiniujmy zbiór:

$$\{b \in A \mid \langle a,b \rangle \in R\}$$

Oznaczmy taki zbiór przez [a]. Zbiór ten nazywa się *klasą abstrakcji* generowaną przez element a względem relacji R.

$A = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a), (c,c), (d,d), (c,d), (d,c)\}$

$[a] = \{a, b\}$

$[b] = \{a, b\}$

$[c] = \{c, d\}$

$[d] = \{c, d\}$

Można pokazać, że zbiór klas abstrakcji posiada następujące własności:

1. $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$
2. jeżeli $\langle a,b \rangle \in R$, to $[a]_R = [b]_R$, i na odwrót
3. jeżeli $[a]_R \neq [b]_R$, to $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

Uwaga: jeżeli mamy na zbiorze A zdefiniowaną relację równoważności, to relacja ta wyznacza podział zbioru na rozłączne podzbiory (klasy abstrakcji). Zbiór, którego elementami są wszystkie klasy abstrakcji nazywamy *zbiorem ilorazowym* zbioru A względem relacji R i oznaczamy $A/_R$.

Relacja równoważności służy do klasyfikacji zbioru obiektów.

Przykład:

- O: zbiór osób
- R: binarna relacja na O, taka, że $(a,b) \in R$ jeśli a i b są w tym samym wieku.
    + Zwrotna: tak
    + Symeryczna: tak
    + Przechodnia: tak

$[a] = \{b \in O$: a i b mają ten sam wiek$\}$

Złożenie relacyjne (superpozycja): R1°R2 relacji R1, R2 zdefiniowanych na A jest relacją następującą:

$R_1 \circ R_2 = \{<a,c> \mid$ istnieje $b \in A$ takie, że $<a,b> \in R_1$ oraz $<b,c> \in R_2\}$

Dla dowolnej liczby naturalnej n, *n-krotnym złożeniem* relacji R jest relacja R^n zdefiniowana *indukcyjnie* w sposób następujący:

$R^0 = \{<a,a> \mid a \in A\}$
$R^{n+1} = R^n \circ R$ dla $n = 0,1,2,...$

Funkcje

Niech A oraz B będą dwoma dowolnymi zbiorami. *Funkcją* albo *odwzorowaniem* z A w B nazywamy każdą relację binarną

$$f \subseteq A \times B,$$

która posiada własność następującą: Dla każdego elementu $a \in A$ istnieje dokładnie jeden element $b \in B$ taki, że afb, albo inaczej: $\langle a,b \rangle \in f$.

W przypadku funkcji używamy najczęściej notacji prefiksowej/przedrostkowej pisząc

$$f(a) = b,$$

zamiast afb.

Element a nazywamy *argumentem* funkcji zaś b *wartością* funkcji dla argumentu a. W celu zaznaczenia, że relacja f jest funkcją piszemy:

$$f : A \rightarrow B$$

Zapis ten będziemy nazywać *sygnaturą* funkcji.

Zbiór A nazywamy *dziedziną określoności* f, zaś zbiór B - *przeciwdziedziną* f.

Funkcje o wybranych własnościach:

- f jest *różnowartościową* (albo *iniekcją*) jeżeli $f(a_1) \neq f(a_2)$ dla dowolnych dwóch różnych elementów $a_1, a_2 \in A$.
- f jest *surjekcją* (albo *funkcją na*) jeżeli dla dowolnego $b \in B$ istnieje taki element $a \in A$ taki, że $f(a)=b$.
- f jest *wzajemnie jednoznaczna,* jeżeli jest iniekcją i surjekcją.

Ogólnie, funkcja może mieć n argumentów ($n \geq 0$). Sygnatura funkcji n-argumentowej ma postać:

$$f : A_1 \times \ldots \times A_n \rightarrow B$$

Algebry

Algebrą jednorodzajową - krótko *algebrą* - nazywamy parę:

$$<A, F>$$

gdzie

- A jest dowolnym zbiorem, zwanym *nośnikiem* algebry,
- F jest rodziną funkcji zwanych *operacjami* albo *działaniami*, dowolna funkcja $f \in F$ ma sygnaturę postaci

$$f : A^n \to A \ (n \geq 0).$$

Jeżeli $F = \{f_1,...,f_m\}$, to algebrę zapisujemy często w postaci układu:

$$<A, f_1,...,f_m>$$

<u>Przykłady</u> :

- Algebry liczbowe: $<N_0, +, *, 0, 1>$
  $<Z, +, -, *, 0, 1>$
  $<Q, +, -, *, /, 0, 1>$

- Algebra zbiorów $<2^A, \cup, \cap, \backslash, \emptyset>$

Algebrą wielorodzajową nazywamy układ:

$$<A_1,..., A_n, f_1,..., f_m>$$

gdzie

- $A_1,..., A_n$ są dowolnymi zbiorami, nazywanymi nośnikami algebry,
- $f_1,..., f_m$ są funkcjami o sygnaturach postaci

$$f_i : A_1^{a1} \times ... \times A_n^{an} \to A_j$$

a1, ..., an są dowolnymi dodatnimi liczbami całkowitymi

Systemy relacyjne:

Ogólnie, *systemem relacyjnym* jest układ:

$$<A_1,..., A_n, R_1,..., R_k, f_1,..., f_m>$$

gdzie

- $A_1,..., A_n$ są dowolnymi zbiorami, nazywanymi nośnikami systemu,
- $R_1,..., R_k$ są relacjami o sygnaturach postaci
  $$R_i \subseteq A_1^{a1}\times...\times A_n^{an}$$
- $f_1,..., f_m$ są funkcjami o sygnaturach postaci
  $$f_i : A_1^{a1}\times...\times A_n^{an} \rightarrow A_j$$

<u>Przykłady</u> Systemami relacyjnymi - dokładniej algebrami wielorodzajowymi - są typy danych w językach programowania. Na przykład typ całkowity *integer* w Pascalu jest algebrą dwurodzajową:

(Int, Bool, +, -, *, /, =, <)

gdzie: Int = {-N,..., 0,..., N}; Bool = {false, true}

$+ : Int \times Int \rightarrow Int;$

$- : Int \times Int \rightarrow Int$

$* : Int \times Int \rightarrow Int$

$/ : Int \times Int \rightarrow Int$

$= : Int \times Int \rightarrow Bool$

$< : Int \times Int \rightarrow Bool$

Ciągi i słowa

Niech dany będzie zbiór A. *Ciągiem skończonym* elementów ze zbioru A o *długości* n nazywa się funkcję

$$\lambda : \{1,...,n\} \to A.$$

Ciąg λ zapisujemy w postaci:

$$a_1...a_n$$

gdzie $a_1 = f(1),..., a_n = f(n)$, $n \geq 0$.

Jeżeli n = 0, to ciąg jest *pusty* i oznaczamy go symbolem ε.

Ciąg *nieskończony* jest funkcją

$$\lambda: N_0 \to A.$$

Ciąg taki zapisujemy

$$a_0\ a_1\ a_2\ ...$$

jeżeli $a_i = \lambda(i)$ dla $i \in N_0$. i jest indeksem elementu a_i. Dla danego indeksu i skończony ciąg $a_0...a_i$ jest nazywa się *prefiksem* ciągu λ, a ciąg $a_i a_{i+1}...$ *postfiksem* ciągu λ.

Często wyróżniony zbiór symboli nazywa się *alfabetem*.

Słowem nad alfabetem A nazywa się skończony ciąg elementów z A.

Konkatenacją słów s_1 oraz s_2 nad alfabetem A, co zapisujemy $s_1 s_2$, nazywa się słowo, które powstaje przez dopisanie do słowa s_1 słowa s_2.

Słowo t jest *podsłowem* słowa s wtedy i tylko wtedy, gdy isnieją takie słowa s_1, s_2, że $s = s_1 t s_2$.

Niech A będzie dowolnym alfabetem. Przez A^k oznaczmy zbiór wszystkich słów o długości k (k = 1,2, ...) nad alfabetem A, tzn.

$$A^k = \{a_1\, a_2 \ldots a_k \mid a_i \in A \text{ oraz } i = 1,\ldots, k\}$$

Niech $A^0 = \{\varepsilon\}$, wówczas zbiór

$$A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^k$$

jest zbiorem wszystkich skończonych ciągów (słów) nad alfabetem A.

Językiem formalnym L nad alfabetem A nazywamy dowolny podzbiór A^*, czyli $L \subseteq A^*$.

MOCE ZBIORÓW

Def.: Zbiory X i Y nazywamy *równolicznymi* jeśli istnieje funkcja różnowartościowa f: $X \to Y$ przekształcająca X na Y. Innymi słowy, f jest *bijekcją*. Fakt ten piszemy:

$$X \sim Y.$$

Przykład:

1. Zbiory X i Y mają po n elementów
2. X = N, Y – zbiór wszystkich liczb parzystych, wówczas funkcja f ma postać: f(n) = 2n dla każdego $n \in N$.
3. X = N, Y – zbiór wszystkich liczb nieparzystych, wówczas funkcja f ma postać: f(n) = 2n+1 dla każdego $n \in N$.

Własności:

1. $X \sim X$ dla każdego zbioru X
2. Jeśli $X \sim Y$ to $Y \sim X$
3. $(X \sim Y)$ i $(Y \sim Z)$ to $(X \sim Z)$

~ jest więc relacją równoważności dla danej rodziny zbiorów.