RACHUNEK ZDAŃ

I. SYNTAKTYKA

- Alfabet: zbiór symboli na zmienne logiczne
- Zbiór stałych logicznych: {true, false}
- Zbiór spójników logicznych
- Zbiór symboli pomocniczych: nawiasy
- **Zasada budowy formuł logicznych**

+ Formuła: poprawne słowo w języku logiki

+ Poprawne słowo:

  - Zmienna jest formułą
  - Stała logiczna jest formułą
  - Jeśli X i Y są formułami, to formułą jest także:

$\neg X$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \Rightarrow Y$, $X \Leftrightarrow Y$, (X)

- Zasady opuszczenia nawiasów:

1. Zamiast (X) można pisać X
2. Spójniki logiczne mają ustaloną kolejność wiązania (od najsilniejszego do najsłabszego):

   $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Przykład:

- $\neg a \vee b$ zamiast $((\neg a) \vee b)$
- $\neg a \wedge b \vee c$ zamiast $(((\neg a) \wedge b) \vee c)$

21

3. Jeśli takie same spójniki występują obok siebie zakłada się, że spójniki $\wedge$ i $\vee$ łączą w lewo, a $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ łączą w prawo.

Przykład:

- $a \wedge b \wedge c$ znaczy $((a \wedge b) \wedge c)$
- $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ znaczy $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$

Syntaktyka definiuje pewien język formalny.

II. SEMANTYKA

- Język formalny definiowany przez syntaktykę jest językiem *bez interpretacji*

- Określenie interpretacji języka polega na ustaleniu dziedziny interpretacji oraz na ustawieniu sposobu przyporządkowania elementom języka (formułom) obiektów z dziedziny interpretacji.

- Dziedzina interpretacji RZ:

  $$\text{Log} = \{1, 0\}$$

  gdzie symbol 1 reprezentuje wartość *prawda* a 0 – *fałsz*.

- Sposób przyporządkowania:
  + znaczenie dla stałych i spójników logicznych
  + znaczenie dla formuł
- Dla przyporządkowania znaczeń dla stałych i spójników logicznych używa się *funkcję interpretacji bazowej **I***:

Jeśli **jesteś chory** to **idź do lekarza**

1	**1**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**
1	**0**	**0**

Jeśli **jesteś chory** to **jest woda na Marsie.**

I(true) = 1

I(false) = 0

$I_{\neg}$ jest funktorem 1-argumentowym

$I_{\wedge}$, $I_{\vee}$, $I_{\Rightarrow}$, $I_{\Leftrightarrow}$ są funktorami 2-argumentowymymi

a	b	$I_{\neg}(a)$	$I_{\wedge}(a,b)$	$I_{\vee}(a,b)$	$I_{\Rightarrow}(a,b)$	$I_{\Leftrightarrow}(a,b)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Dziedzina interpretacji i funkcje interpretacji bazowej tworzą algebrę jednorodzajową:

$<Log, \{I(true), I(false), I_{\neg}, I_{\wedge}, I_{\vee}, I_{\Rightarrow}, I_{\Leftrightarrow} \}>$

- Dla określenia znaczeń formuł potrzebne jest funkcja wartościowania:

  $v: Z \rightarrow Log$

  gdzie Z jest zbiorem symboli zmiennych logicznych

- Dla przyporządkowania znaczeń dla formuł: używamy funkcji INT_v opartej o tę algebrę

  $INT_v: FORM \rightarrow Log$

• Jeśli formuła X jest w postaci stałej logicznej, to

  $INT_v(true) = 1$ oraz $INT_v(false) = 0$

• Jeśli formuła X jest w postaci zmiennej logicznej, to

  $INT_v(a) = v(a)$

• Jeśli formuła X jest złożona, to

  $INT_v(\neg X) = I_{\neg}(INT_v(X))$

  $INT_v(X \otimes Y) = I_{\otimes}(INT_v(X), INT_v(Y))$

gdzie $\otimes \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Spełnianie formuły:

Formuła X spełnia interpretację INT przy wartościowaniu v jeśli:

$$INT_v(X) = 1$$

Mówimy: X jest spełniona przy wartościowaniu v w interpretacji INT.

Tautologia RZ:

Tautologią RZ nazywamy formułę, która jest spełniona przy każdym wartościowaniu interpretacji INT.

Równoważność formuł:

Dwie formuły X i Y są równoważne w interpretacji INT, jeśli przy każdym wartościowaniu są jednocześnie spełnione lub nie.

$$X \equiv Y$$

Wybrane tautologie:

1. $p \vee \neg p$ (prawo wyłączonego środka)

2. $\neg(p \wedge \neg p)$ (prawo niesprzeczności)

3. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (idempotentność koniunkcji)

4. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (idempotentność alternatywy)

5. $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ (prawo podwójnego przeczenia)

6. $p \Rightarrow p$ (prawo identyczności)

7. $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$ (pierwsze prawo Claviusa)

8. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (przemienność koniunkcji)

9. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (przemienność alternatywy)

10. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (pierwsze prawo de Morgana)

11. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (drugie prawo de Morgana)

12. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee \neg p)$ (pierwsze prawo definiowania implikacji)

13. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ (drugie prawo definiowania implikacji)

14. $[p \Rightarrow (q \wedge \neg q)] \Rightarrow \neg p$ (pierwsze prawo redukcji do absurdu)

15. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)]$ (pierwsze prawo ekstensjonalności)

16. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)]$ (drugie prawo ekstensjonalności)

Sposoby udowodnienia tautologii:

1. Metoda zero-jedynkowa: polega na sprawdzeniu formuł dla wszystkich wartościowań jej zmiennych.

2. Metoda dowodzenia transformacyjnego: polega na przekształceniu formuły w sposób równoważny do postaci znanej tautologii.

Niech dane będą formuły X i Y, z tym że w X występuje zmienna x. Przez zapis

$$X[x:=Y]$$

rozumiemy formułę, która powstaje z formuły X przez tekstowe zastąpienie każdego wystąpienia zmiennej x przez formułę Y.

Twierdzenie:

Jeśli formuła $A \Leftrightarrow B$ jest tautologią, X jest pewną formułą, a x jest zmienną logiczną występującą w X, to formuła

$$X[x:=A] \Leftrightarrow X[x:=B]$$

jest także tautologią.

Reguła zastąpienia:

Jeśli X jest formułą a Y jest jej podformułą, to zastąpienie podformuły Y dowolną równoważną formułą nie zmienia wartości logicznej formuły X.

Reguła przechodniości:

Jeśli formuły $A \Leftrightarrow B$ i $B \Leftrightarrow C$ są tautologiami, to tautologią jest również formuła $A \Leftrightarrow C$.