Logika pragmatyczna

Logika pragmatyczna

- Kontakt:
  - dr hab. inż. Adam Kasperski
  - pokój 509 B4
  - adam.kasperski@pwr.wroc.pl
  - materiały + literatura + informacje na stronie www.
- Zaliczenie:
  - Kolokwium pisemne na ćwiczeniach.

Pojęcie logiki pragmatycznej

Logika uchwytuje sposoby wnioskowania stosowane w naukach i uznawane za poprawne.

Słowo pragmatyczna (z języka greckiego *pragma* - czyn) oznacza logikę jako narzędzie, którym posługujemy się w nauce.

Przykłady wnioskowania

1. Każdy kwadrat jest prostokątem. Figura *A* jest kwadratem. Wynika z tego, że figura *A* jest prostokątem.
2. Jeżeli się nauczę to zdam. Nie zdałem więc się nie nauczyłem.
3. Jeżeli się nauczę to zdam. Nie nauczyłem się więc nie zdam.
4. Każdy filozof jest mądry. Nie jestem filozofem więc nie jestem mądry.

Wnioskowania 1 i 2 są poprawne natomiast wnioskowania 3 i 4 nie są poprawne.

Przykłady wnioskowania

1. Każdy kwadrat jest prostokątem. Figura A jest kwadratem. Wynika z tego, że figura A jest prostokątem.
2. Jeżeli się nauczę to zdam. Nie zdałem więc się nie nauczyłem.
3. Jeżeli się nauczę to zdam. Nie nauczyłem się więc nie zdam.
4. Każdy filozof jest mądry. Nie jestem filozofem więc nie jestem mądry.

Wnioskowania 1 i 2 są poprawne natomiast wnioskowania 3 i 4 nie są poprawne.

Klasyczny rachunek zdań

Zdaniem logicznym nazywamy stwierdzenie, któremu można przypisać wartość prawda albo fałsz.

Prawdę oznaczamy cyfrą 1 a fałsz cyfrą 0.

Przykłady:

1. 9 dzieli się przez 3.
2. Słońce krąży wokół Ziemii.
3. Która godzina?
4. Ten samochód jest drogi.

Zdanie 1 jest prawdziwe, zdanie 2 jest fałszywe, a zdanie 3 nie jest zdaniem logicznym. Zdanie 4 zależy od określenia pojęcia drogi.

Klasyczny rachunek zdań

Zdaniem logicznym nazywamy stwierdzenie, któremu można przypisać wartość prawda albo fałsz.

Prawdę oznaczamy cyfrą 1 a fałsz cyfrą 0.

Przykłady:

1. 9 dzieli się przez 3.
2. Słońce krąży wokół Ziemii.
3. Która godzina?
4. Ten samochód jest drogi.

Zdanie 1 jest prawdziwe, zdanie 2 jest fałszywe, a zdanie 3 nie jest zdaniem logicznym. Zdanie 4 zależy od określenia pojęcia drogi.

Język rachunku zdań

1. Zmienne zdaniowe $p, q, r, s, \ldots$ oznaczające dowolne zdania logiczne.
2. Spójniki (funktory) zdaniowe:

$\sim p$	**nieprawda, że** p (**nie** p)	[negacja]
$p \wedge q$	p **i** q	[koniunkcja]
$p \vee q$	p **lub** q	[alternatywa]
$p \rightarrow q$	**jeżeli** p **to** q (**z** p **wynika** q)	[implikacja]
$p \equiv q$	p **wtedy i tylko wtedy, gdy** q	[równoważność]

Formuły logiczne

1. Dowolna zmienna zdaniowa jest formułą logiczną.
2. Jeżeli ϕ i ψ są formułami logicznymi, to formułami logicznymi są również wyrażenia:
   1. $\sim(\phi)$, $\sim(\psi)$
   2. $(\phi) \vee (\psi)$, $(\phi) \wedge (\psi)$, $(\phi) \rightarrow (\psi)$, $(\phi) \equiv (\psi)$

Przykłady formuł logicznych:

- $p, q, \sim p$
- $p \vee q, p \rightarrow q$
- $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)$
- $\sim((p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)) \equiv p$

Formuły logiczne

1. Dowolna zmienna zdaniowa jest formułą logiczną.
2. Jeżeli ϕ i ψ są formułami logicznymi, to formułami logicznymi są również wyrażenia:
   1. $\sim(\phi), \sim(\psi)$
   2. $(\phi) \vee (\psi), (\phi) \wedge (\psi), (\phi) \rightarrow (\psi), (\phi) \equiv (\psi)$

Przykłady formuł logicznych:

- $p, q, \sim p$
- $p \vee q, p \rightarrow q$
- $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)$
- $\sim((p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)) \equiv p$

Formuły logiczne

Uwagi:

1. Należy starannie wstawiać nawiasy. Na przykład formuła $p \vee q \rightarrow r$ jest niejednoznaczna. Może oznaczać zarówno $(p \vee q) \rightarrow r$ jak i $p \vee (q \rightarrow r)$.
2. W wyrażeniu $(\sim p)$ możemy opuścić nawiasy. Tak więc na przykład formuła $(p \wedge q) \rightarrow ((\sim p) \vee r)$ jest równoważna $(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee r)$.

Formuły logiczne

Formuły logiczne formalizują niektóre rozumowania wyrażone w języku, np. języku polskim.

Przykład:

Jeżeli uczyłem się, to zdam i jeżeli zdam, to będę szczęśliwy; wynika z tego, że jeżeli nie będę szczęśliwy to się nie uczyłem.

- p - uczyłem się.
- q - zdam.
- r - będę szczęśliwy.

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim p)$$

Formuły logiczne

Formuły logiczne formalizują niektóre rozumowania wyrażone w języku, np. języku polskim.

Przykład:

Jeżeli uczyłem się, to zdam i jeżeli zdam, to będę szczęśliwy; wynika z tego, że jeżeli nie będę szczęśliwy to się nie uczyłem.

- p - uczyłem się.
- q - zdam.
- r - będę szczęśliwy.

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (\sim r \to \sim p)$$

Formuły logiczne

Formuła logiczna nie jest zdaniem logicznym. Zdanie logiczne otrzymamy podstawiając pod zmienne zdaniowe konkretne zdania. Nazywamy to wartościowaniem formuły (lub interpretacją).

Przykład:

$$((p \to q) \land \sim q) \to \sim p$$

- p - "3>2"
- q - "3>1"

$$(((3 > 2) \to (3 > 1)) \land \sim (3 > 1)) \to \sim (3 > 2)$$

Jaka jest wartość logiczna tego zdania?

Formuły logiczne

Formuła logiczna nie jest zdaniem logicznym. Zdanie logiczne otrzymamy podstawiając pod zmienne zdaniowe konkretne zdania. Nazywamy to wartościowaniem formuły (lub interpretacją).

Przykład:

$$((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$$

- p - "3>2"
- q - "3>1"

$$(((3 > 2) \to (3 > 1)) \wedge \sim (3 > 1)) \to \sim (3 > 2)$$

Jaka jest wartość logiczna tego zdania?

Wartościowanie formuły

Dla dowolnych zdań logicznych logicznych p i q:

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Wartościowanie formuły

Określ wartość logiczną formuły:

$$(p \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge (p \rightarrow q))$$

dla wartościowania $p = 1$, $q = 0$ i $r = 1$.

p	q	r	$\sim q$	α $p \vee \sim q$	β $p \rightarrow q$	γ $r \wedge \beta$	$\alpha \rightarrow \gamma$
1	0	1	1	1	0	0	0

Formuła jest więc fałszywa dla tego wartościowania.

Wartościowanie formuły

Określ wartość logiczną formuły:

$$(p \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge (p \rightarrow q))$$

dla wartościowania $p = 1$, $q = 0$ i $r = 1$.

p	q	r	$\sim q$	α $p \vee \sim q$	β $p \rightarrow q$	γ $r \wedge \beta$	$\alpha \rightarrow \gamma$
1	0	1	1	1	0	0	0

Formuła jest więc fałszywa dla tego wartościowania.

Tautologie rachunku zdań

Formuła logiczna jest tautologią jeżeli jest prawdziwa dla każdego wartościowania zmiennych zdaniowych.

Przykład: prawo wyłączonego środka $p \vee \sim p$.

p	$p \vee \sim p$
1	1
0	1

Tautologia jest zawsze prawdziwa niezależnie jakie zdania logiczne podstawimy pod zmienne zdaniowe.

Tautologie rachunku zdań

Pokaż, że następująca formuła jest tautologią:

$$((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$$

		α		β		
p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\alpha \wedge \sim q$	$\sim p$	$\beta \to \sim p$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Tautologie rachunku zdań

Pokaż, że następująca formuła jest tautologią:

$$((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$$

		α		β		
p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\alpha \wedge \sim q$	$\sim p$	$\beta \to \sim p$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Tautologie rachunku zdań

Pokaż, że następująca formuła jest tautologią:

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim p)$$

Formuła może być fałszywa tylko wtedy gdy $(\sim r \rightarrow \sim p)$ jest fałszywa, czyli tylko wtedy gdy $r = 0$ i $p = 1$. Zatem wystarczy tylko sprawdzić dwa przypadki (dla obu wartości q):

			α	β	γ	δ	
p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$\alpha \wedge \beta$	$\sim r \rightarrow \sim p$	$\gamma \rightarrow \delta$
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1

Tautologie rachunku zdań

Pokaż, że następująca formuła jest tautologią:

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (\sim r \to \sim p)$$

Formuła może być fałszywa tylko wtedy gdy $(\sim r \to \sim p)$ jest fałszywa, czyli tylko wtedy gdy $r = 0$ i $p = 1$. Zatem wystarczy tylko sprawdzić dwa przypadki (dla obu wartości q):

			α	β	γ	δ	
p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$\alpha \wedge \beta$	$\sim r \to \sim p$	$\gamma \to \delta$
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1

Tautologie

Wybrane tautologie rachunku zdań:

T1.	$p \vee \sim p$	Prawo wyłączonego środka
T2.	$p \rightarrow p$	Prawo identyczności
T3.	$\sim (\sim p) \equiv p$	Prawo podwójnego przeczenia
T4.	$(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$	Prawo kontrapozycji
T5.	$(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$	Prawo definiowania implikacji
T6.	$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$	Prawo łączności alternatywy
T7.	$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$	Prawo łączności koniunkcji
T8.	$((p \vee q) \wedge r) \equiv ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$	I prawo rozdzielności
T9.	$((p \wedge q) \vee r) \equiv ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$	II prawo rozdzielności
T10.	$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$	I prawo de Morgana
T11.	$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$	II prawo de Morgana
T12.	$(p \equiv q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$	Prawo zastępowania równ.
T13.	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$	Prawo przemienności altern.
T14.	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	Prawo przemienności kon.

Przekształcanie formuł

W formułach zawierających koniunkcję (alternatywę) można opuszczać nawiasy i dowolnie zmieniać kolejność zmiennych.

Przykład:

$$((p \vee \sim q) \vee r) \equiv (p \vee (\sim q \vee r)) \equiv (p \vee \sim q \vee r) \equiv (\sim q \vee p \vee r)$$

Jednak nie wolno tego zrobić z implikacją!

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r$$

nie jest równoważne formule

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Przekształcanie formuł

W formułach zawierających koniunkcję (alternatywę) można opuszczać nawiasy i dowolnie zmieniać kolejność zmiennych.

Przykład:

$$((p \vee \sim q) \vee r) \equiv (p \vee (\sim q \vee r)) \equiv (p \vee \sim q \vee r) \equiv (\sim q \vee p \vee r)$$

Jednak nie wolno tego zrobić z implikacją!

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r$$

<u>nie jest</u> równoważne formule

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Przekształcanie formuł

Jeżeli formuła ϕ jest tautologią, to podstawiając pod zmienne zdaniowe w ϕ dowolne formuły otrzymamy nową tautologię.

Przykład:
Bierzemy tautologię:

$$(p \to q) \equiv (\sim p \vee q)$$

i podstawiamy pod p formułę $(p \to q)$ a pod q formułę $(p \wedge q)$.
Otrzymujemy nową tautologię:

$$((p \to q) \to (p \wedge q)) \equiv (\sim (p \to q) \vee (p \wedge q))$$

Przekształcanie formuł

Jeżeli formuła ϕ jest tautologią, to podstawiając pod zmienne zdaniowe w ϕ dowolne formuły otrzymamy nową tautologię.

Przykład:
Bierzemy tautologię:

$$(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

i podstawiamy pod p formułę $(p \rightarrow q)$ a pod q formułę $(p \wedge q)$.
Otrzymujemy nową tautologię:

$$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)) \equiv (\sim (p \rightarrow q) \vee (p \wedge q))$$

Przekształcanie formuł

Tautologie pozwalają czasami na uproszczenie formuły.

Przykład:

$\sim(\sim r \wedge (\sim q \wedge p)) \vee q$	**(T11., T3.)**
$(r \vee \sim(\sim q \wedge p)) \vee q$	**(T11., T3.)**
$(r \vee (q \vee \sim p)) \vee q$	Opuszczanie nawiasów, przemienność
$\sim p \vee r \vee q \vee q$	$(q \vee q) \equiv q)$
$\sim p \vee r \vee q$	

Przekształcanie formuł

Tautologie pozwalają czasami na uproszczenie formuły.

Przykład:

$\sim(\sim r \wedge (\sim q \wedge p)) \vee q$	**(T11., T3.)**
$(r \vee \sim(\sim q \wedge p)) \vee q$	**(T11., T3.)**
$(r \vee (q \vee \sim p)) \vee q$	Opuszczanie nawiasów, przemienność
$\sim p \vee r \vee q \vee q$	$(q \vee q) \equiv q)$
$\sim p \vee r \vee q$	

Przekształcanie formuł

Każdą formułę można przedstawić w postaci równoważnej używając jedynie alternatywy i negacji lub koniunkcji i negacji.

Przykład:

$$
\begin{array}{ll}
p \equiv q & \textbf{(T12.)} \\
(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) & \textbf{(T5.)} \\
(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) & \textbf{(T10.)} \\
\sim (\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p)) &
\end{array}
$$

Przekształcanie formuł

Każdą formułę można przedstawić w postaci równoważnej używając jedynie alternatywy i negacji lub koniunkcji i negacji.

Przykład:

$$
\begin{array}{ll}
p \equiv q & \textbf{(T12.)} \\
(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) & \textbf{(T5.)} \\
(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) & \textbf{(T10.)} \\
\sim (\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p)) &
\end{array}
$$

Przekształcanie formuł

Alternatywę zmiennych zdaniowych lub ich negacji nazywamy klauzulą. Na przykład:

- $(p \vee q \vee r)$
- $(\sim p \vee q)$
- $(p \vee \sim q \vee \sim r \vee s)$

Formuła jest w koniunkcyjnej postaci normalnej (KPN) jeżeli jest koniunkcją pewnej liczby klauzul. Na przykład:

- $(p \vee \sim q \vee \sim r \vee s) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (r \vee s \vee \sim t)$
- $p \wedge q \wedge (\sim p \vee \sim q)$

Przekształcanie formuł

Każdą formułę można zapisać w równoważnej koniunkcyjnej postaci normalnej.

Przykład:

$(p \to q) \to \sim r$	**(T5.)**
$(\sim p \vee q) \to \sim r$	**(T5.)**
$\sim (\sim p \vee q) \vee \sim r$	**(T10.,T3.)**
$(p \wedge \sim q) \vee \sim r$	**(T9.)**
$(p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim r)$	

Przekształcanie formuł

Każdą formułę można zapisać w równoważnej koniunkcyjnej postaci normalnej.

Przykład:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow \sim r \qquad \textbf{(T5.)}$$
$$(\sim p \vee q) \rightarrow \sim r \qquad \textbf{(T5.)}$$
$$\sim (\sim p \vee q) \vee \sim r \qquad \textbf{(T10.,T3.)}$$
$$(p \wedge \sim q) \vee \sim r \qquad \textbf{(T9.)}$$
$$(p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

Przekształcanie formuł

Formuła w koniunkcyjnej postaci normalnej jest tautologią wtedy i tylko wtedy gdy w każdej klauzuli występuje pewna zmienna zdaniowa i jej negacja.

Przykład tautologii:

$$(p \vee q \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee q \vee r \vee \sim q) \wedge (\sim s \vee s)$$

W koniunkcyjnej postaci normalnej łatwo rozstrzygnąć czy formuła jest tautologią.