Konsekwencja logiczna

Niech $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ będą formułami logicznymi. Formuła Ψ wynika logicznie z $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ jeżeli

$$(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \cdots \wedge \Phi_n) \rightarrow \Psi$$

jest tautologią. Formuły $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ nazywamy założeniami a Ψ nazywamy tezą (wnioskiem, konsekwencją).

Powyższa definicja oznacza, że jeżeli Ψ wynika logicznie z założeń, to nie jest możliwe wartościowanie, w którym wszystkie założenia są prawdziwa a teza jest fałszywa. Definicja ta formalizuje poprawne wnioskowanie logiczne.

Konsekwencja logiczna

Można pokazać, że formuła

$$(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \cdots \wedge \Phi_n) \rightarrow \Psi$$

jest równoważna formule:

$$\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow (\Phi_3 \rightarrow \cdots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow \Psi) \ldots))$$

(Dowód na ćwiczeniach)

Konsekwencja logiczna

Jeżeli Azor jest psem, to Azor jest zwierzęciem. Azor nie jest psem. Zatem Azor nie jest zwierzęciem

- p - *Azor jest psem*
- q - *Azor jest zwierzęciem*

$$((p \rightarrow q) \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$$

Założeniami są: $p \rightarrow q$ i $\sim p$. Tezą jest $\sim q$. Rozumowanie nie jest poprawne ponieważ zdania "Azor nie jest psem" ($p = 0$) i "Azor jest zwierzęciem" ($q = 1$) spełniają założenia. Natomiast teza $\sim q = 0$ jest fałszywa.

Konsekwencja logiczna

Jeżeli Azor jest psem, to Azor jest zwierzęciem. Azor nie jest zwierzęciem. Zatem Azor nie jest psem

- p - Azor jest psem.
- q - Azor jest zwierzęciem.

$$((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$$

Założeniami są: $p \rightarrow q$ i $\sim q$. Tezą jest $\sim p$. Rozumowanie jest poprawne ponieważ powyższa formuła jest tautologią. Zatem teza „Azor nie jest psem” wynika logicznie z podanych założeń.

Sprzeczne założenia

Założenia $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ są sprzeczne jeżeli formuła $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \cdots \wedge \Phi_n$ jest zawsze fałszywa. Za sprzecznych założeń wynika logicznie dowolna teza Φ.

Pada deszcz i nie pada deszcz. Zatem Ziemia jest płaska

$$(p \wedge \sim p) \rightarrow q$$

Pierwotne reguły wnioskowania

Reguła odrywania, RO (Modus Ponens):

$$\begin{array}{l} \Phi \rightarrow \Psi \\ \Phi \\ \hline \Psi \end{array} \qquad \begin{array}{l} \textit{Jeżeli pada śnieg to jest zimno} \\ \textit{Pada śnieg} \\ \hline \textit{Jest zimno} \end{array}$$

$$((\Phi \rightarrow \Psi) \wedge \Phi) \rightarrow \Psi$$

Pierwotne reguły wnioskowania

Reguła opuszczania koniunkcji, OK:

$$\frac{\Phi \wedge \Psi}{\begin{array}{l}\Phi \\ \Psi\end{array}} \qquad\qquad \frac{\textit{Pada śnieg i jest zimno}}{\begin{array}{l}\textit{Pada śnieg} \\ \textit{Jest zimno}\end{array}}$$

$$(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Phi$$

$$(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Psi$$

Pierwotne reguły wnioskowania

Reguła dołączania koniunkcji, DK:

$$\frac{\begin{array}{l}\Phi\\ \Psi\end{array}}{\Phi \wedge \Psi} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{l}\textit{Pada śnieg}\\ \textit{Jest zimno}\end{array}}{\textit{Pada śnieg i jest zimno}}$$

$$(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow (\Phi \wedge \Psi)$$

Pierwotne reguły wnioskowania

Reguła opuszczania alternatywy, OA:

$\Phi \vee \Psi$	*Pada śnieg lub jest zimno*
$\sim \Phi$	*Nie pada śnieg*
Ψ	*Jest zimno*

$$((\Phi \vee \Psi) \wedge \sim \Phi) \rightarrow \Psi$$

Pierwotne reguły wnioskowania

Reguła dołączania alternatywy, DA:

$$\frac{\Phi}{\Phi \vee \Psi} \qquad \frac{\textit{Pada śnieg}}{\textit{Pada śnieg lub jest zimno}}$$

$$\Phi \rightarrow (\Phi \vee \Psi)$$

Pierwotne reguły wnioskowania

Reguła dołączania równoważności, DR:

$$\frac{\Phi \rightarrow \Psi \qquad \Psi \rightarrow \Phi}{\Phi \equiv \Psi}$$

Jeżeli pada śnieg to jest zimno
Jeżeli jest zimno to pada śnieg
Pada śnieg wtedy i tylko wtedy gdy jest zimno

$$((\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)) \rightarrow (\Phi \equiv \Psi)$$

Pierwotne reguły wnioskowania

Reguła opuszczania równoważności, OR:

$$\frac{\Phi \equiv \Psi}{\begin{array}{c}\Phi \rightarrow \Psi \\ \Psi \rightarrow \Phi\end{array}}$$

Pada śnieg wtedy i tylko wtedy gdy jest zimno
Jeżeli pada śnieg to jest zimno
Jeżeli jest zimno to pada śnieg

$$(\Phi \equiv \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi))$$

Dodatkowe reguły wnioskowania

Prawa de Morgana:

$$\frac{\sim(\Phi \vee \Psi)}{\begin{array}{c}\sim \Phi \\ \sim \Psi\end{array}} \qquad \frac{\sim \Phi \wedge \sim \Psi}{\sim(\Phi \vee \Psi)}$$

Prawo kontrapozycji:

$$\frac{\Phi \rightarrow \Psi}{\sim \Psi \rightarrow \sim \Phi}$$

Reguły wnioskowania - zbiorczo

RO: $\dfrac{\Phi \rightarrow \Psi \quad \Phi}{\Psi}$

OA: $\dfrac{\Phi \vee \Psi \quad \sim \Phi}{\Psi}$

DM1: $\dfrac{\sim (\Phi \vee \Psi)}{\sim \Phi \quad \sim \Psi}$

DK: $\dfrac{\Phi \quad \Psi}{\Phi \wedge \Psi}$

DR: $\dfrac{\Phi \rightarrow \Psi \quad \Psi \rightarrow \Phi}{\Phi \equiv \Psi}$

DM2: $\dfrac{\sim \Phi \wedge \sim \Psi}{\sim (\Phi \vee \Psi)}$

OK: $\dfrac{\Phi \wedge \Psi}{\Phi \quad \Psi}$

OR: $\dfrac{\Phi \equiv \Psi}{\Phi \rightarrow \Psi \quad \Psi \rightarrow \Phi}$

KP: $\dfrac{\Phi \rightarrow \Psi}{\sim \Psi \rightarrow \sim \Phi}$

DA: $\dfrac{\Phi}{\Phi \vee \Psi}$

Dowód założeniowy wprost

W początkowych wierszach dowodu wypisujemy założenia. Kolejne wiersze generujemy z wierszy poprzednich, korzystając ze znanych reguł wnioskowania. Dowód kończymy jeżeli jednym z uzyskanych wierszy jest teza.

Dowód założeniowy wprost

Jeżeli się nauczę to zdam. Jeżeli zdam to będę szczęśliwy. Zatem jeżeli się nauczę to będę szczęśliwy.

- p - *nauczę się*
- q - *zdam*
- r - *będę szczęśliwy*

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Dowód założeniowy wprost

1: $(p \to q) \land (q \to r)$	Założenie
2: p	Założenie
3: $p \to q$	OK 1
4: $q \to r$	OK 2
5: q	RO 2,3
6: r	RO 4,5 $\square$

Dowód założeniowy wprost

Jeżeli się nauczę lub będę ściągał to zdam egzamin lub zostanę złapany na ściąganiu. Jeżeli się nauczę to nie zostanę złapany na ściąganiu. Nauczę się. Zatem zdam egzamin.

- *p - Nauczę się*
- *q - Będę ściągał*
- *r - Zdam egzamin*
- *s - Zostanę złapany na ściąganiu*

$$(((p \lor q) \to (r \lor s)) \land (p \to \sim s) \land p) \to r$$

Dowód założeniowy wprost

1: $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$	Założenie
2: $p \rightarrow \sim s$	Założenie
3: p	Założenie
4: $\sim s$	RO 2,3
5: $p \vee q$	DA 3
6: $r \vee s$	RO 1,5
7: r	OA 4,6 $\square$

Dowód założeniowy nie wprost

W początkowych wierszach dowodu wypisujemy założenia oraz zanegowaną tezę. Kolejne wiersze generujemy z wierszy poprzednich, korzystając z reguł wnioskowania. Dowód kończymy jeżeli otrzymamy dwa sprzeczne wiersze postaci Φ i $\sim \Phi$.

Dowód założeniowy niewprost

Jeżeli będę sie nudził i będzie padał deszcz to pójdę do kina. Zatem, jeżeli będę sie nudził i nie pójdę do kina, to nie będzie padał deszcz

- p - *Będę się nudził*
- q - *Będzie padał deszcz*
- r - *Pójdę do kina*

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q)$$

Dowód założeniowy nie wprost

1: $(p \wedge q) \rightarrow r$	Założenie
2: $p \wedge \sim r$	Założenie
3: q	Z dow. nie wprost
4: p	OK 2
5: $\sim r$	OK 2
6: $p \wedge q$	DK 3,4
7: r	RO 1,6
8: Sprzeczność 5,7	

Dowód założeniowy nie wprost

Jeżeli Bóg nie chce chronić przed złem, to Bóg nie jest dobry. Jeżeli Bóg nie jest w stanie chronić przed złem, to Bóg nie jest wszechmocny. Bóg nie chce chronić przed przed złem lub nie jest w stanie chronić przed złem. Zatem Bóg nie jest dobry lub nie jest wszechmocny.

- p - *Bóg nie chce chronić przed złem*
- q - *Bóg nie jest dobry*
- r - *Bóg nie jest w stanie chronić przed złem*
- s - *Bóg nie jest wszechmocny*

$$((p \to q) \land (r \to s) \land (p \lor r)) \to (q \lor s)$$

Dowód założeniowy nie wprost

1: $p \rightarrow q$	Założenie
2: $r \rightarrow s$	Założenie
3: $p \vee r$	Założenie
4: $\sim (q \vee s)$	Z dow. nie wprost
5: $\sim q$	DM1 4
6: $\sim s$	DM1 4
7: $\sim q \rightarrow \sim p$	KP 1
8: $\sim s \rightarrow \sim r$	KP 2
9: $\sim p$	RO 5,7
10: $\sim r$	RO 6,8
11: $\sim p \wedge \sim r$	DK 9,10
12: $\sim (p \vee r)$	DM2 11
13: Sprzeczność 3,12	

Wielokrotne założenia

Jeżeli się nauczę to zdam i będę szczęśliwy. Jeżeli się nie nauczę to będę w stresie i będę liczył na szczęście. Nie będę liczył na szczęście. Zatem zdam.

- p - *Nauczę się*
- q - *Zdam*
- r - *Będę szczęśliwy*
- s - *Będę w stresie*
- t - *Będę liczył na szczęście*

$$((p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\sim p \rightarrow (s \wedge t)) \wedge \sim t) \rightarrow q$$

Dowód założeniowy nie wprost

1: $p \rightarrow (q \wedge r)$	Założenie
2: $\sim p \rightarrow (s \wedge t)$	Założenie
3: $\sim t$	Założenie
4: $\sim q$	Z dow. nie wprost
4.1: p	Dodatkowe założenie
4.2: $q \wedge r$	RO 1,4.1
4.3: q	OK 4.2
4.4: Sprzeczność 4.3, 4	
5.1: $\sim p$	Dodatkowe założenie
5.2: $s \wedge t$	RO 2,5.1
5.3: t	OK 5.2
5.4: Sprzeczność 3, 5.3	

Niepoprawne rozumowania

Jeżeli w dowodzie założeniowym nie wprost nie można dojść do sprzeczność, to rozumowanie jest niepoprawne. Z wierszy dowodu można wówczas odczytać kontrprzykład.

Niepoprawne rozumowania

Jeżeli Azor jest psem, to Azor jest zwierzęciem. Azor nie jest psem. Zatem Azor nie jest zwierzęciem

$$((p \rightarrow q) \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$$

1: $p \rightarrow q$ Założenie
2: $\boxed{\sim p}$ Założenie
3: $\boxed{q}$ Z dow. nie wprost

Kontrprzykład: $p = 0$ (Azor nie jest psem), $q = 1$ (Azor jest zwierzęciem)

Niepoprawne rozumowania

Jeżeli uznajesz prawa moralne i nie postępujesz według nich, to jesteś niekonsekwentny. Jeżeli jesteś niekonsekwentny, to postępujesz źle. Zatem, jeżeli uznajesz prawa moralne i postępujesz według nich, to nie postępujesz źle

- p - *Uznajesz prawa moralne*.
- q - *Postępujesz według nich*.
- r - *Jesteś niekonsekwentny*.
- t - *Postępujesz źle*.

$$((p \wedge \sim q) \to r) \wedge (r \to t)) \to ((p \wedge q) \to \sim t)$$

Dowód założeniowy nie wprost

1: $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$	Założenie
2: $r \rightarrow t$	Założenie
3: $p \wedge q$	Założenie
4: $\boxed{t}$	Z dow. nie wprost
5: $\boxed{p}$	OK 3
6: $\boxed{q}$	OK 3

Kontrprzykład: $t = 1$ (Postępujesz źle), $p = 1$ (Uznajesz prawa moralne), $q = 1$ (Postępujesz według nich), r dowolne.

Reguła rezolucji

Reguła rezolucji jest następującą regułą wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c} l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee \boldsymbol{p} \vee \cdots \vee l_n \\ k_1 \vee k_2 \vee \cdots \vee \sim \boldsymbol{p} \vee \cdots \vee k_m \end{array}}{l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n \vee k_1 \vee k_2 \vee \cdots \vee k_m}$$

gdzie k_i, l_i są zmiennymi zdaniowymi lub negacjami zmiannych zdaniowych. We wniosku usuwamy powtarzające się składniki.

Przykład:

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee \sim r \vee \boldsymbol{q} \vee s \\ p \vee t \vee \sim \boldsymbol{q} \end{array}}{p \vee \sim r \vee s \vee t}$$

Algorytm rezolucji

Chcemy pokazać, że Ψ jest konsekwencją logiczną $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$.

1. Sprowadzamy formuły $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \cdots \wedge \Phi_n$ i $\sim \Psi$ do postaci normalnej koniunkcyjnej.
2. Wypisujemy wszystkie otrzymane klauzule w kolejnych wierszach. Stosujemy systematycznie regułę rezolucji do kolejnych wierszy (w tym również do nowo utworzonych). Dowód kończymy jeżeli otrzymamy dwa wiersze sprzeczne (teza udowodniona) albo nie można utworzyć żadnej nowej klauzuli (teza nie wynika z przesłanek).

Algorytm rezolucji

Pokaż, że $p \vee s$ wynika logicznie z założeń $p \to q$, $r \to s$, $p \vee r$.

1. $(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim r \vee s) \wedge (p \vee r)$, $\sim (p \vee s) \equiv \sim p \wedge \sim s$.
2.

1:	$\sim p \vee q$	
2:	$\sim r \vee s$	
3:	$p \vee r$	
4:	$\sim p$	
5:	$\sim s$	
6:	$q \vee r$	1,3
7:	$p \vee s$	2,3
8:	$\sim r$	2,5
9:	r	3,4
	$\square$	8,9

Algorytm rezolucji

Za pomocą algorytmu rezolucji można pokazać, że układ założeń jest sprzeczny. Na przykład założenia

$$p \vee q, p \rightarrow q, \sim q \vee r, \sim r$$

są sprzeczne ponieważ:

1:	$p \vee q$	
2:	$\sim p \vee q$	
3:	$\sim q \vee r$	
4:	$\sim r$	
5:	q	1,2
6:	$\sim q$	3,4
	$\square$	5,6