Język rachunku predykatów

1. Zmienne $x, y, z \ldots$
2. Predykaty n-argumentowe $P(x, y, \ldots), Q(x, y \ldots), \ldots$
3. Funktory zdaniowe $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$
4. Kwantyfikatory: istnieje $\exists$, dla każdego $\forall$

Język rachunku predykatów

Ustalenie dziedziny (uniwersum) $\mathcal{U}$ dla zmiennych $x, y, z \ldots$ oraz określenie predykatów $P, Q, R, \ldots$ w $\mathcal{U}$ nazywamy interpretacją.

Przykłady

1. $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \dots\}$ jest zbiorem liczb naturalnych.
   - $P(x)$ - x jest liczbą parzystą.
   - $Q(x, y)$ - x jest większe od y.
   - $R(x, y, z)$ - z jest sumą x i y.
2. $\mathcal{U}$ - zbiór wszystkich ludzi.
   - $P(x)$ - x jest kobietą.
   - $Q(x, y)$ - x jest rodzicem y.
   - $R(x, y, z)$ - x, y, z są rodzeństwem.
3. $\mathcal{U}$ - zbiór wszystkich trójkątów.
   - $P(x)$ - x jest prostokątny.
   - $Q(x, y)$ - x jest podobny do y.

Język rachunku predykatów

Jeżeli w predykacie $P(x, y, \ldots)$ przypiszemy zmiennym $x, y, \ldots$ określone wartości z uniwersum $\mathcal{U}$ to otrzymamy zdanie logiczne.

Przykład: $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $P(x, y)$ - x jest większe od y.

- $P(3, 4)$ jest zdaniem fałszywym
- $P(5, 2)$ jest zdaniem prawdziwym.

Predykaty 0-argumentowe $P, Q, \ldots$ możemy traktować jako zwykłe zdania logiczne. Język rachunku predykatów obejmuje więc język klasycznego rachunku zdań.

Formuły rachunku predykatów

- Predykat jest formułą rachunku predykatów.
- Jeżeli ϕ i ψ są formułami rachunku predykatów, to $\sim(\phi)$, $(\phi) \vee (\psi)$, $(\phi) \wedge (\psi)$, $(\phi) \rightarrow (\psi)$, $(\phi) \equiv (\psi)$ są formułami rachunku predykatów.
- Jeżeli ϕ jest formułą rachunku predykatów a v jest zmienną w ϕ, to $\exists_v(\phi)$ i $\forall_v(\phi)$ są formułami rachunku predykatów.

Przykłady:

- $P, P(x), Q(x), P(x,y), Q(x,y,z), \ldots$
- $P \vee Q(x), P(x) \wedge Q(x), Q(x) \rightarrow P(x,y), \sim P(x) \wedge Q(x), \ldots$
- $\exists_x(P(x)), \forall_y(P(x,y)), \exists_x(P(x) \rightarrow Q(x)), \ldots$
- $\forall_y(\exists_x(P(x) \rightarrow Q(y)))$

Zasięg kwantyfikatora

Zasięgiem kwantyfikatora nazywamy wyrażenie zawarte w nawiasie otwartym bezpośrednio po tym kwantyfikatorze.

Przykład:

$$\exists_x (\underline{P(x,y) \wedge Q(x)}) \rightarrow R(x)$$

Zmienna jest **związana** jeżeli jest w zasięgu pewnego kwantyfikatora, w którym występuje ta zmienna.

Przykład:

$$\exists_x (P(\underline{x},y) \wedge Q(\underline{x})) \rightarrow R(x)$$

Opuszczanie nawiasów

Nawiasy można opuścić po kwantyfikatorze jeżeli nie prowadzi to do niejednoznaczności w określeniu jego zasięgu.

Poprawne:

- $\exists_x (\underline{P(x)}) \equiv \exists_x \underline{P(x)}$
- $\exists_x \underline{(\forall_y \underline{(P(x,y) \rightarrow Q(x))})} \equiv \exists_x \forall_y \underline{\underline{(P(x,y) \rightarrow Q(x))}}$

Niepoprawne(!):

- $\exists_x \underline{(P(x) \wedge Q(x))} \equiv \exists_x \underline{P(x)} \wedge Q(x)$

Formuły zamknięte

Formuła jest zamknięta jeżeli wszystkie zmienne są w niej związane.

Przykłady formuł zamkniętych:

- $\forall_x P(x)$
- $\exists_y \forall_x P(x, y)$
- $(\exists_x P(x)) \rightarrow (\forall_x Q(x))$
- $\exists_x (Q(x) \rightarrow \forall_y P(x, y))$

Formuły zamknięte

Formuła zamknięta dla określonej interpretacji staje się zdaniem logicznym. Zatem posiada określoną wartość logiczna prawda lub fałsz. Za pomocą formuł zamkniętych można wyrażać złożone własności badanego uniwersum.

Formuły zamknięte

Ustalamy uniwersum $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \dots\}$ i predykaty:

- $P(x)$ - liczba x jest parzysta.
- $Q(x)$ - liczba x jest pierwsza.
- $R(x, y) \equiv (x \leq y)$ liczba x jest niewiększa od liczby y.

Zdania w tym uniwersum:

- Istnieje liczba parzysta: $\exists_x P(x)$
- Istnieje najmniejsza liczba naturalna: $\exists_x \forall_y (x \leq y)$
- Żadna liczba parzysta większa od 2 nie jest pierwsza:

$$\sim (\exists_x (Q(x) \wedge (3 \leq x) \wedge P(x))$$

lub równoważnie:

$$\forall_x ((P(x) \wedge (3 \leq x)) \rightarrow \sim Q(x))$$

Formuły zamknięte

Ustalamy uniwersum $\mathcal{U}$ - wszyscy filozofowie.

- $P(x)$ - filozof x jest mądry.
- $Q(x,y)$ - filozof x jest uczniem filozofa y.

Zdania w tym uniwersum:

- Filozof jest mądry jeżeli jest uczniem mądrego filozofa.

$$\forall_x(\exists_y(Q(x,y) \wedge P(y)) \rightarrow P(x))$$

- Jeżeli filozof jest mądry, to każdy jego uczeń jest mądry.

$$\forall_y(P(y) \rightarrow \forall_x(Q(x,y) \rightarrow P(x)))$$

Formuły spełnialne i prawdziwe

Formuła jest spełnialna jeżeli jest zdaniem prawdziwym w pewnej interpretacji. Formuła jest prawdziwa (jest tautologią rachunku predykatów) jeżeli jest zdaniem prawdziwym w każdej interpretacji.

Formuły spełnialne i prawdziwe

Formuła $\exists_x \forall_y P(x, y)$ jest spełnialna ale nie jest tautologią rachunku predykatów ponieważ:

- Jest zdaniem prawdziwym dla interpretacji
  - $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \dots\}$
  - $P(x, y)$ - $x \leq y$
- Jest zdaniem fałszywym dla interpretacji
  - $\mathcal{U} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
  - $P(x, y)$ - $x \leq y$.

Formuła $\forall_x (P(x) \to P(x))$ jest tautologią rachunku predykatów ponieważ jest prawdziwa w każdej interpretacji.

Wybrane prawa rachunku predykatów

T1. $\forall_x (P(x) \rightarrow P(x))$

T2. $\sim \forall_x P(x) \equiv \exists_x (\sim P(x))$

T3. $\sim \exists_x P(x) \equiv \forall_x (\sim P(x))$

T4. $\forall_x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall_x P(x) \wedge \forall_x Q(x))$

T5. $\exists_x (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists_x P(x) \vee \exists_x Q(x))$

T6. $(\forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x)) \rightarrow (\forall_x (P(x) \vee Q(x))$

T7. $\exists_x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists_x P(x) \wedge \exists_x Q(x))$

T8. $\forall_x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall_x P(x) \rightarrow \forall_x Q(x))$

T9. $\exists_x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv (\forall_x P(x) \rightarrow \exists_x Q(x))$

T10. $\exists_x \forall_y P(x, y) \rightarrow \forall_y \exists_x P(x, y)$

Pokazać, że implikacje odwrotne w **T6, T7, T8, T10** nie są tatutologiami (ćwiczenia)

Tautologie rachunku predykatów

Pokazano, że nie istnieje ogólna metoda (algorytm) rozstrzygający czy zadana formuła rachunku predykatów jest tautologią. W ogólnym przypadku problem ten jest więc bardzo trudny.

Tautologię można czasami udowodnić korzystając z praw logiki oraz ze znanych tautologii. W przypadku, gdy wszystkie predykaty mają nie więcej niż jedną zmienną można skorzystać z tabelki.

Tautologie rachunku predykatów

Udowodnić tautologię **T9**:

$$\exists_x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv (\forall_x P(x) \rightarrow \exists_x Q(x))$$

$\exists_x (P(x) \rightarrow Q(x))$	Prawo logiki
$\exists_x (\sim P(x) \vee Q(x))$	**T5.**
$\exists_x (\sim P(x)) \vee \exists_x Q(x)$	**T2.**
$\sim \forall_x P(x) \vee \exists_x Q(x)$	Prawo logiki
$\forall_x P(x) \rightarrow \exists_x Q(x)$	

Tabelka dla predykatów jednoargumentowych

$$P(x) = \begin{cases} 1 & \text{zawsze 1} \\ 0 & \text{zawsze 0} \\ T & \text{czasem 1 czasem 0} \end{cases}$$

$P(x)$	$\sim P(x)$	$\exists_x P(x)$	$\forall_x P(x)$
1	0	1	1
0	1	0	0
T	T	1	0

$P(x)$	Q(x)	$P(x) \vee Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$	$P(x) \rightarrow Q(x)$	$P(x) \equiv Q(x)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	T	1	T	T	T
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1
0	T	T	0	1	T
T	1	1	T	1	T
T	0	T	0	T	T
T	T	1,T	0,T	1,T	0,1,T

Udowodnić tautologię **T6.**

$$(\forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x)) \rightarrow (\forall_x (P(x) \vee Q(x))$$

$P(x)$	$Q(x)$	$\forall_x P(x)$	$\forall_x Q(x)$	α $\forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x)$	β $P(x) \vee Q(x)$	γ $\forall_x \beta$	$\alpha \rightarrow \gamma$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	T	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1
0	T	0	0	0	T	0	1
T	1	0	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	T	0	1
T	T	0	0	0	1,T	1,0	1

Tautologie rachunku predykatów

Tautologie pozwalają na przekształcanie formuł.

$$\sim \forall_x (\exists_y (P(x) \rightarrow Q(x,y)))$$

$\exists_x (\sim \exists_y (P(x) \rightarrow Q(x,y))$	**T2**
$\exists_x \forall_y \sim (P(x) \rightarrow Q(x,y))$	**T3**
$\exists_x \forall_y \sim (\sim P(x) \vee Q(x,y))$	prawo logiki
$\exists_x \forall_y (P(x) \wedge \sim Q(x,y))$	prawo logiki

Reguły wnioskowania

W dowodach, w których korzystamy z kwantyfikatorów można stosować wszystkie reguły z rachunku zdań. Dodatkowo stosujemy następujące reguły wnioskowania:

O∃: $\dfrac{\exists_x P(x)}{P(a)}$ O∀: $\dfrac{\forall P(x)}{P(b), P(x^*)}$

D∃: $\dfrac{P(b)}{\exists_x P(x)}$

a jest nową stałą niewystępującą w dowodzie, *b* jest dowolną istniejącą już stałą, x^* jest nową zmienną wolną. Reguły te pozwalają udowodnić tylko niektóre wnioskowania. Można wprowadzić regułę D∀ ale jest ona dosyć skomplikowana.

Dowód założeniowy wprost

$$\forall_x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists_x P(x) \to \exists_x Q(x))$$

1:	$\forall_x(P(x) \to Q(x))$	Założenie
2:	$\exists_x P(x)$	Założenie
3:	$P(a)$	O$\exists$ 2
4:	$P(a) \to Q(a)$	O$\forall$ 1
5:	$Q(a)$	RO 3,4
6:	$\exists_x Q(x)$	D$\exists$ 4 $\square$

Dowód założeniowy nie wprost

$$\forall_x \sim P(x) \rightarrow \sim \exists_x P(x)$$

1:	$\forall_x \sim P(x)$	Założenie
2:	$\exists_x P(x)$	z.d.n.
3:	$P(a)$	O$\exists$ 2
4:	$\sim P(a)$	O$\forall$ 1
	Sprzeczność 3,4 $\square$	

Dowody założeniowe - błędne wnioskowanie

$$\forall_x \exists_y P(x,y) \rightarrow \exists_x R(x,x)$$

1:	$\forall_x \exists_y P(x,y)$	Zał.
2:	$\exists_y R(x^*,y)$	O$\forall$ 1
3:	$R(x^*,a)$	O$\exists$ 2
4:	$R(a,a)$	Błąd!
5:	$\exists_x R(x,x)$	D$\exists$ 4 $\square$

1:	$\forall_x \exists_y P(x,y)$	Zał.
2:	$\forall_x R(x,a)$	Błąd!
3:	$R(a,a)$	O$\forall$ 2
5:	$\exists_x R(x,x)$	D$\exists$ 4 $\square$

Formuła nie jest tautologią. Nie jest prawdziwa na przykład w interpetacji $\mathcal{U} = R$ i $P(x,y)$ - x jest większe od y.

Dowody założenowe

Każdy uczony jest racjonalistą. Niektórzy filozofowie nie są racjonalistami. Zatem niektórzy filozofowie nie są uczonymi

- $\mathcal{U}$ - wszyscy ludzie.
- $P(x)$ - x jest uczonym.
- $Q(x)$ - x jest filozofem.
- $R(x)$ - x jest racjonalistą.

$$(\forall_x(P(x) \to R(x)) \wedge \exists_x(Q(x) \wedge \sim R(x))) \to \exists_x(Q(x) \wedge \sim P(x))$$

Dodowy założeniowe

1:	$\forall_x (P(x) \to R(x))$	Zał.
2:	$\exists_x (Q(x) \wedge \sim R(x))$	Zał.
3:	$Q(a) \wedge \sim R(a)$	O$\exists$ 2
4:	$P(a) \to R(a)$	O$\forall$ 1
5:	$Q(a)$	OK 3
6:	$\sim R(a)$	OK 3
7:	$\sim R(a) \to \sim P(a)$	KP 4
8:	$\sim P(a)$	RO 6,7
9:	$Q(a) \wedge \sim P(a)$	DK 5,8
10:	$\exists_x (Q(x) \wedge \sim P(x))$	D$\exists$ 9 $\square$

Dowody założeniowe

Każdy krytyk literacki ceni pewnego pisarza, a niektórzy pisarze nie cenią żadnego krytyka literackiego. Piotr jest krytykiem literackim. Zatem Piotr ceni kogoś i ktoś nie ceni Piotra.

- $\mathcal{U}$ - wszyscy ludzie.
- $P(x)$ - x jest krytykiem literackim.
- $Q(x)$ - x jest pisarzem.
- $R(x, y)$ - x ceni y.

$$(\forall_x(P(x) \to \exists_y(Q(y) \wedge R(x, y)))\wedge$$
$$\exists_x(Q(x) \wedge \forall_y(P(y) \to\sim R(x, y))\wedge$$
$$P(\text{Piotr})) \to$$
$$(\exists_x P(\text{Piotr}, x) \wedge \exists_x \sim P(x, \text{Piotr}))$$

Dowody założeniowe

1:	$\forall_x (P(x) \rightarrow \exists_y (Q(y) \wedge R(x,y)))$	Zał.
2:	$\exists_x (Q(x) \wedge \forall_y (P(y) \rightarrow \sim R(x,y))$	Zał.
3:	$P(\text{Piotr})$	Zał.
4:	$P(\text{Piotr}) \rightarrow \exists_y (Q(y) \wedge R(\text{Piotr},y))$	O$\forall$ 1
5:	$\exists_y (Q(y) \wedge R(\text{Piotr},y))$	RO 3,4
6:	$Q(a) \wedge \forall_y (P(y) \rightarrow \sim R(a,y))$	O$\exists$ 2
7:	$Q(b) \wedge R(\text{Piotr},b)$	O$\exists$ 5
8:	$\forall_y (P(y) \rightarrow \sim R(a,y))$	OK 6
9:	$P(\text{Piotr}) \rightarrow \sim R(a,\text{Piotr})$	O$\forall$ 8
10:	$R(\text{Piotr},b)$	OK 7
11:	$\sim R(a,\text{Piotr})$	RO 3,9
12:	$\exists_x P(\text{Piotr},x)$	D$\exists$ 10
13	$\exists_x \sim R(x,\text{Piotr})$	D$\exists$ 11
14:	$\exists_x P(\text{Piotr},x) \wedge \exists_x \sim P(x,\text{Piotr})$	DK 12, 13 $\square$

Dowody założenowe

Jest ktoś kogo wszyscy kochają. Zatem każdy kogoś kocha.

- $\mathcal{U}$ - wszyscy ludzie.
- $P(x,y)$ - x kocha y.

$$\exists_y \forall_x P(x,y) \rightarrow \forall_x \exists_y P(x,y)$$

Dowody założeniowe

1:	$\exists_y \forall_x P(x, y)$	Zał.
2:	$\sim \forall_x \exists_y P(x, y)$	Z.d.n.
3:	$\exists_x \forall_y \sim P(x, y)$	DM 2
4:	$\forall_x P(x, a)$	O$\exists$ 1
5:	$\forall_y \sim P(b, y)$	O$\exists$ 3
6:	$P(b, a)$	O$\forall$ 4
7:	$\sim P(b, a)$	O$\forall$ 5
	Sprzeczność 6,7 $\square$	

Dowody założeniowe

Wszyscy logicy są zabawni. Ktoś jest logikiem. Zatem każdy jest zabawny.

- $\mathcal{U}$ - wszyscy ludzie.
- $P(x)$ - x jest logikiem.
- $Q(x)$ - y - jest zabawny.

$$(\forall_x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists_x P(x)) \rightarrow \forall_x Q(x)$$

Dowody założeniowe

1:	$\forall_x (P(x) \to Q(x))$	Zał.
2:	$\exists_x P(x)$	Zał.
3:	$\sim \forall_x Q(x)$	Z.d.n.
4:	$\boxed{P(a)}$	O∃ 2
5:	$\exists_x \sim Q(x)$	DM 3
6:	$\boxed{\sim Q(b)}$	O∃ 5
7:	$P(a) \to Q(a)$	O∀ 1
8:	$P(b) \to Q(b)$	O∀ 1
9:	$\boxed{Q(a)}$	RO 4,7
10:	$\sim Q(b) \to \sim P(b)$	KP 8
11:	$\boxed{\sim P(b)}$	RO 6,10

Rozumowanie nie jest poprawne. Kontrprzykład: uniwersum $\mathcal{U} = \{a, b\}$, a jest zabawny i jest filozofem, b nie jest zabawny i nie jest filozofem. Założenia są spełnione a teza nie jest prawdziwa.