Zbiory

Pojęcie zbioru jest w matematyce pojęciem pierwotnym, którego nie definiujemy. Gdy a jest elementem należącym do zbioru A to piszemy $a \in A$. Stosujemy również oznaczenie $a \notin A$ jeżeli $\sim (a \in A)$. Będziemy zakładać, że dla dowolnego a potrafimy rozstrzygnąć czy $a \in A$ czy $a \notin A$.

Specjalnym zbiorem jest zbiór pusty nie zawierający żadnych elementów. Oznaczamy go symbolem $\emptyset$.

Zbiory

Zbiór możemy określić na następujące sposoby:

- Wyliczając wszystkie elementy.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

- Podając precyzyjny przepis na generowanie kolejnych elementów.

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

- Stosując postać $\{a : P(a)\}$, gdzie $P(a)$ jest predykatem jednoargumentowym w określonej interpretacji.

$$C = \{n : \ (n \in N) \wedge (n \text{ dzieli się przez } 3)\}$$

- Podając precyzyjną nazwę zbioru.

$$A = \text{ Zbiór laureatów nagrody Nobla}$$

Zbiory

Zbiory A i B są równe jeżeli mają takie same elementy.

$$A = B \equiv \forall_x (x \in A \equiv x \in B)$$

W określaniu zbioru nie ma znaczenia kolejność elementów. Np:

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$$

Również

$$\{a, a, b, c\} = \{a, b, c\}$$

zatem w określeniu zbioru usuwamy powtarzające się elementy.

Zbiory

Zbiór A jest podzbiorem zbioru B, co oznaczamy jako $A \subseteq B$, jeżeli każdy element należący do A należy również do B.

$$A \subseteq B \equiv \forall_x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

- $\{a, b, c\} \subseteq \{a, c, b, d, e\}$.
- {Sienkiewicz, Einstein} $\subseteq$ Zbiór laureatów nagrody Nobla

Zbiorem potęgowym zbioru A nazywamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A. Zbiór potęgowy oznaczamy symbolem 2^A.

- $2^{\{a,b,c\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Jeżeli A zawiera n elementów, to 2^A zawiera 2^n elementów.

Zbiory - ćwiczenie

Uzasadnij, że:

1. $\emptyset \subseteq A$ dla każdego A.
2. $A \in 2^A$ dla każdego A.
3. $A = B \equiv ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$ dla dowolnych A i B.
4. Nie jest prawdą, że $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
5. Nie jest prawdą, że $A \subseteq 2^A$.

Algebra zbiorów

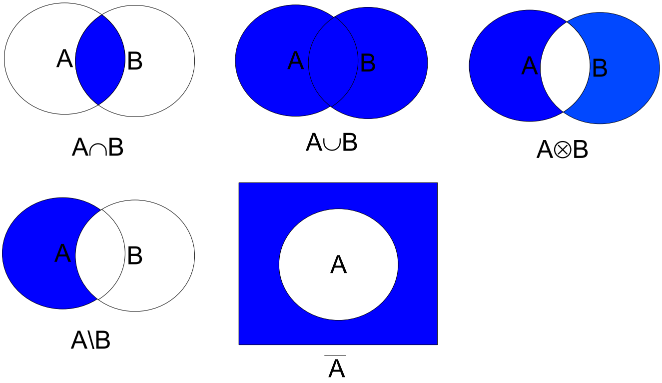
Wprowadzamy następujące operacje na zbiorach:

$A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$	[suma]
$A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$	[iloczyn]
$A \setminus B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$	[różnica]
$A \otimes B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	[różnica symetryczna]
$\overline{A} = \mathcal{U} \setminus A$	[dopełnienie]

gdzie $\mathcal{U}$ jest pewnym zbiorem, zwanym uniwersum.

Algebra zbiorów

Diagramy Venna



Algebra zbiorów

Przykład:

- $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
- $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Zachodzi:

- $A \cap B = \{2, 4\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$
- $A \setminus B = \{6, 8, 10, \ldots\}$
- $B \setminus A = \{1, 3, 5\}$
- $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

Algebra zbiorów

Prawa algebry zbiorów można udowodnić korzystając z praw logiki. Udowodnić prawo:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) \equiv x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap C) \equiv \\
& \equiv (x \in A \wedge x \in B) \wedge \sim (x \in A \wedge x \in C) \equiv \\
& \equiv (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C) \equiv \\
& \equiv (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \equiv \\
& \equiv x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \equiv x \in A \wedge x \in B \setminus C \equiv x \in A \cap (B \setminus C)
\end{aligned}$$

Ćwiczenie - udowodnij powyższe prawo wykorzystując diagramy Venna.

Algebra zbiorów

Udowodnić prawo:

$$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$$

Oznaczamy:

- p - $x \in A$
- q - $x \in B$
- r - $x \in C$

Tłumaczymy prawo na język logiki:

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

I dowodzimy (dowolną metodą), że powyższa formuła jest tautologią.

Algebra zbiorów

Wybrane prawa algebry zbiorów:

T1. $(A \cup B) = (B \cup A)$

T2. $(A \cap B) = (B \cap A)$

T3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

T4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

T5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

T6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

T7. $A \cup \emptyset = A$

T8. $A \cap \emptyset = \emptyset$

T9. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

T10. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

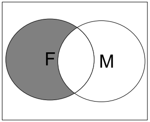
Sylogistyka

Sylogistyka jest działem logiki badającym zdania typu: *każde S jest P*, *niektóre S są P*, *żadne S nie jest P*, *niektóre S nie są P*, gdzie S i P są pewnymi predykatami jednoargumentowymi.

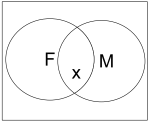
Jeżeli ustalimy uniwersum $\mathcal{U}$, to możemy utożsamić predykaty $P(x)$ i $Q(x)$ z podzbiorami $A = \{x : P(x)\}$ i $B = \{x : Q(x)\}$ w $\mathcal{U}$. Wówczas:

- *każde S jest P*: $A \subseteq B$ (równoważnie $A \cap \overline{B} = \emptyset$)
- *niektóre S są P*: $A \cap B \neq \emptyset$
- *żadne S nie jest P*: $A \cap B = \emptyset$
- *niektóre S nie są P*: $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$

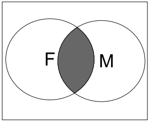
Sylogistyka



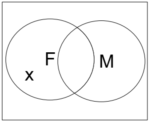
Każdy filozof jest mądry



Niektórzy filozofowie są mądrzy



Żaden filozof nie jest mądry



Niektórzy filozofowie nie są mądrzy

Szary obszar oznacza zbiór pusty a krzyżyk oznacza zbiór niepusty.

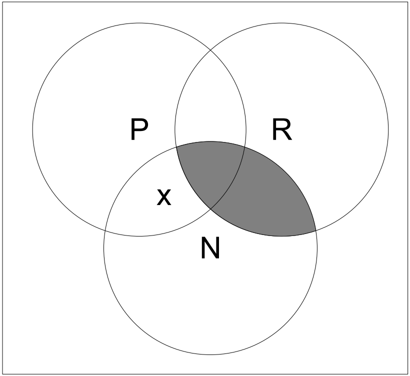
Sylogistyka

Żaden rozumny człowiek nie jest nacjonalistą. Niektórzy politycy są nacjonalistami. Zatem niektórzy politycy nie są ludźmi rozumnymi.

- $\mathcal{U}$ - zbiór ludzi
- R - zbiór ludzi rozumnych
- N - zbiór nacjonalistów
- P - zbiór polityków.

$$(R \cap N = \emptyset \wedge P \cap N \neq \emptyset) \rightarrow (P \cap \overline{R} \neq \emptyset)$$

Sylogistyka



Rysujemy założenia na diagramie Venna. Otrzymujemy od razu tezę $P \cap \overline{R} \neq \emptyset$. Nie można narysować założeń w ten sposób aby nie spełnić tezy!

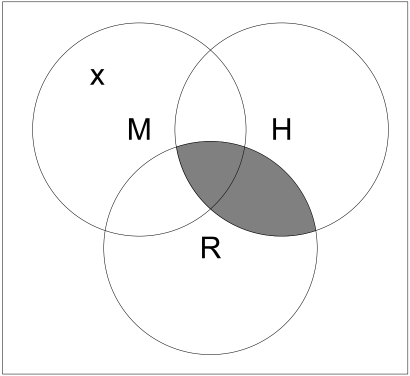
Sylogistyka

Żaden humanista nie jest racjonalistą. Pewni matematycy nie są humanistami. Zatem pewni matematycy są racjonalistami.

- $\mathcal{U}$ - zbiór ludzi
- H - zbiór humanistów
- R - zbiór racjonalistów
- M - zbiór matematyków

$$(H \cap R = \emptyset \wedge M \cap \overline{H} \neq \emptyset) \rightarrow (M \cap R \neq \emptyset)$$

Sylogistyka



Można narysować założenie tak aby teza nie była spełniona. Rozumowanie jest więc niepoprawne.

Iloczyn kartezjański zbiorów

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych, których pierwszy element należy do A a drugi do B:

$$A \times B = \{< x, y >: x \in A \land y \in B\}$$

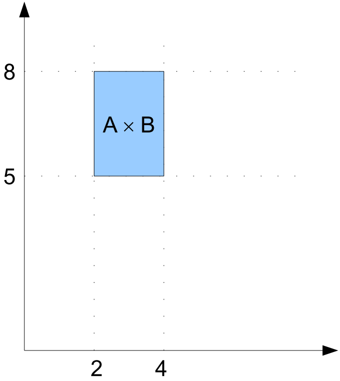
Iloczyn kartezjański zbiorów

Przykład:

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $B = \{a, b, c\}$
- $A \times B = \left\{ \begin{array}{l} <1, a>, <1, b>, <1, c>, \\ <2, a>, <2, b>, <2, c>, \\ <3, a>, <3, b>, <3, c>, \\ <4, a>, <4, b>, <4, c> \end{array} \right\}$

Iloczyn kartezjański zbiorów

- $A = [2, 4]$
- $B = [5, 8]$



Iloczyn kartezjański zbiorów

Iloczyn Kartezjański nie jest przemienny ani łączny, tj. w ogólnym przypadku:

$$A \times B \neq B \times A$$

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

Iloczyn Kartezjański jest rozdzielny względem sumy, różnicy i iloczynu zbiorów, tj.

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

Iloczyn kartezjański zbiorów

Dowód dla sumy:

$$< x, y > \in (A \cup B) \times C \equiv x \in (A \cup B) \wedge y \in C \equiv$$
$$\equiv (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \equiv (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \equiv$$
$$\equiv < x, y > \in A \times C \vee < x, y > \in B \times C \equiv < x, y > \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

Dowód pozostałych dwóch praw na ćwiczeniach.

Relacje

Relacją dwuczłonową nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego zbiorów A i B. Zatem $R \subseteq A \times B$. Jeżeli $< x, y > \in R$ to mówimy, że x i y są w relacji R. Piszemy również xRy.

Przykład:

- A - zbiór kobiet.
- B - zbiór mężczyzn.
- $R = \{< x, y > \in A \times B : x \text{ jest żoną } y\}$ lub równoważnie $xRy \equiv x$ jest żoną y.

Relacje

Relacją w zbiorze A nazywamy podzbiór $A \times A$.

Przykład:

- $\mathcal{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych.
- $R_1 = \{< x, y > \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} : x > y\}$ (relacja większości)
- $R_2 = \{< x, y > \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} : y = x^2\}$

Przedstaw graficznie powyższe relacje.

Funkcje

Funkcją ze zbioru A w zbiór B nazywamy relację $F \subseteq A \times B$ spełniającą następujące dwa warunki:

1. $\forall_x \exists_y < x, y > \in F$
2. $\forall_x \forall_y \forall_z ((< x, y > \in F \wedge < x, z > \in F) \rightarrow (y = z))$

Relacja jest więc funkcją jeżeli dla każdego $x \in A$ istnieje dokładnie jeden $y \in B$ taki, że $< x, y > \in F$. Możemy więc napisać $y = F(x)$ zamiast $< x, y > \in F$.

Funkcje

Które z ponizszych relacji są funkcjami?

1. $R_1 = \{< x, y >\in \mathcal{R} \times \mathcal{R} : x > y\}$
2. $R_2 = \{< x, y >\in \mathcal{R} \times \mathcal{R} : x + y = 0\}$
3. A- zbiór żonatych mężczyzn, B- zbiór kobiet,
$$R_3 = \{< x, y >\in A \times B : x \text{ jest mężem } y\}$$
4. A- zbiór studentów, B- zbiór przedmiotów,
$$R_4 = \{< x, y >\in A \times B : x \text{ uczęszcza na } y\}$$

Rodzaje relacji

Relacja R w zbiorze A jest zwrotna jeżeli

$$\forall_x xRx$$

Relacja R w zbiorze A jest przeciwzwrotna jeżeli

$$\sim \exists_x xRx$$

Relacja R w zbiorze A jest spójna jeżeli

$$\forall_x \forall_y (xRy \vee yRx \vee x = y)$$

Rodzaje relacji

Relacja R w zbiorze A jest symetryczna jeżeli

$$\forall_x \forall_y (xRy \rightarrow yRx)$$

Relacja R w zbiorze A jest przeciwsymetryczna jeżeli

$$\forall_x \forall_y (xRy \rightarrow \sim (yRx))$$

Relacja R w zbiorze A jest antysymetryczna jeżeli

$$\forall_x \forall_y ((xRy \wedge yRx) \rightarrow (x = y))$$

Rodzaje relacji

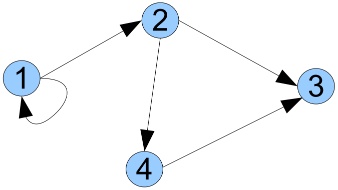
Relacja R w zbiorze A jest przechodnia jeżeli

$$\forall_x \forall_y \forall_z ((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$$

Diagram relacji

Relację w zbiorze skończonym A można przedstawić graficznie.

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <4, 3>\}$



Jaką własność posiada wykres relacji będącej funkcją? Jaką własność posiada wykres relacji dla każdego z rodzajów relacji?

Rodzaje relacji

Określ jakie własności posiadają następujące relacje:

1. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ i $mRn \equiv m - n$ jest podzielne przez 2.
2. $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ i $mRn \equiv m$ dzieli n.
3. A - zbiór ludzi i $aRb \equiv a$ jest bratem lub siostrą b.

Rodzaje relacji

Relacja R jest relacją równoważności w zbiorze A jeżeli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykłady:

- Zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ i zwykła relacja równości.
- Zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$ i relacja

$$mRm \equiv m, n \text{ dają taką samą resztę z dzielenia przez } 3$$

- Zbiór prostych na płaszczyźnie i relacja:

$$aRb \equiv a \text{ jest równoległa do } b$$

Rodzaje relacji

Relacja R jest relacją porządkującą w zbiorze A jeżeli jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia.

Przykłady:

- Zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ i relacja $\leq$.
- Zbiór wektorów $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n] \in \mathcal{R}^n$ i relacja

$$\boldsymbol{x} R \boldsymbol{y} \equiv x_i \geq y_i \text{ dla każdego } i = 1, \ldots, n$$

- Niepusta rodzina zbiorów $\mathcal{A}$.

$$ARB \equiv A \subseteq B$$

Rodzaje relacji

Relacja porządkująca R jest relacją liniowego porządku w zbiorze A jeżeli dodatkowo jest spójna. Relacja taka całkowicie porządkuje zbiór A.

Przykład:

- Zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ i relacja $\leq$.