Podstawy Ekonomii Matematycznej

Aktualizacja: 9 czerwca 2011

Spis treści

.

Część I

Elementy matematyki finansowej.

Rozdział 1

Procent, stopa procentowa, kapitalizacja.

W matematyce ***procent*** oznacza oczywiście setną część całości (*per centum – przez sto*)

$$x\% = \frac{x}{100}.$$

W matematyce finansowej procent o jaki zmienia się dana wielkość nazywamy ***stopą procentową*** (wzrostu lub spadku).

Przykład 1.1. *Przed rokiem cena pewnego towaru wynosiła* 500 *zł i wzrosła w ciągu tego okresu o* 30%. *Obecnie cena powiększyła się o*

$$500 \cdot 30\% = 500 \cdot 0.3 = 150 \text{ [zł]},$$

wynosi więc

$$500 + 150 = 650 \text{ [zł]}.$$

Oczywiście możliwe jest natychmiastowe obliczenie ceny końcowej

$$500 \cdot (1 + 0.3) = 650 \text{ [zł]}.$$

Warto zwrócić też uwagę, że gdyby po roku roku cena towaru zwiększyła się o 40%, *a nie o* 30%, *to stopa wzrostu zwiększyłaby się o* 10 ***punktów procentowych***, *a nie o* 10%. *Dla porównania, gdyby stopa zwiększyłaby się o* 10%, *to wynosiłaby*

$$30\% \cdot (1 + 10\%) = 30\% \cdot (1.1) = 33\%.$$

Przykład 1.2. *Cena pewnego towaru wynosiła* 300 *zł. Po upływie miesiąca wzrosła o* 20%, *a po upływie kolejnego miesiąca wzrosła o* 30%. *Zatem po dwóch miesiącach cena wynosiła*

$$300 \cdot 1.2 \cdot 1.3 = 468 \text{ [zł]}.$$

Cena wzrosła więc o

$$\frac{468 - 300}{300} = 0.56 = 56\%.$$

Oczywiście możliwe jest natychmiastowe obliczenie o ile procent wzrosła cena:

$$1.2 \cdot 1.3 - 1 = 0.56 = 56\%.$$

Uzasadnienie powyższego rachunku jest proste

$$\frac{468 - 300}{300} = \frac{300 \cdot 1.2 \cdot 1.3 - 300}{300} = 1.2 \cdot 1.3 - 1.$$

Powyższy przykład uzasadnia przyjęcie następującej definicji.

Jeśli pewna wielkość zmieniła się o $p\%$, to liczbę $\rho := 1 + \frac{p}{100}$ nazywamy ***czynnikiem procentowym*** zmiany (wzrostu lub spadku).

Uogólniając przykład 1.2 możemy stwierdzić, że jeśli wielkość P wzrasta o $p_1\%$, a następnie wzrasta o $p_2\%$, to wzrasta o

$$\begin{aligned}\frac{P \cdot (100 + p_1)\,\% \cdot (100 + p_2)\,\% - P}{P} &= \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 1 \\ &= \left[\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 1\right] \cdot 100\% = (\rho_1 \cdot \rho_2 - 1) \cdot 100\%,\end{aligned}$$

gdzie $\rho_1 = 1 + \frac{p_1}{100}$, $\rho_2 = 1 + \frac{p_2}{100}$ są czynnikami wzrostu odpowiadającymi stopom p_1, p_2.

W matematyce finansowej często utożsamia się procent o jaki wzrasta kapitał z ***odsetkami***, czyli wielkością o jaką wzrósł kapitał. Powiększenie kapitału o odsetki wygenerowane przez ten kapitał nazywa się ***kapitalizacją odsetek***. Same odsetki nie są kapitałem, ale staną się jego częścią dopiero po kapitalizacji. Czas, po którym odsetki są dopisywane do kapitału nazywamy ***okresem kapitalizacji***. Kapitał, który wygenerował odsetki nazywa się ***kapitałem początkowym***, a kapitał powiększony, po okresie kapitalizacji, o odsetki nazywa się ***kapitałem końcowym***. Czas, w ciągu którego odsetki są generowane nazywa się ***czasem oprocentowania***.

Stosunek odsetek do kapitału, który je wygenerował w ustalonym okresie nosi nazwę ***okresowej stopy procentowej***. W praktyce najczęściej mamy do czynienia ze stopami ustalonymi dla okresu rocznego i wtedy mówimy o ***rocznej stopie procentowej***, ***stopie w stosunku rocznym*** lub używamy skrótu ***p.a.*** (*per annum).* Warto zauważyć, że efektem obliczenia odsetek za dany okres nie musi być ich kapitalizacja.

Przez ***warunki oprocentowania*** należy rozumieć dane, których znajomość wystarcza, aby obliczyć wysokość odsetek należnych od ustalonego kapitału za ustalony czas.

Rozdział 2

Procent prosty.

2.1. Zasada oprocentowania prostego, stopa roczna i podokresowa.

W przypadku transakcji finansowych zwykle nie określa się odsetek, lecz wysokość stopy procentowej oraz sposób obliczania odsetek – według zasady oprocentowania prostego lub składanego.

Zasada oprocentowania prostego. *Odsetki oblicza się od kapitału początkowego proporcjonalnie do długości czasu oprocentowania.*

Niech:
K_0 – początkowa wartość kapitału,
r – roczna stopa procentowa,
n – czas oprocentowania wyrażony w latach,
I_n – odsetki za czas n lat,
K_n – końcowa wartość kapitału po n latach.

Przy powyższych oznaczeniach zasadę oprocentowania prostego można zapisać jako

$$\boxed{I_n = rK_0 \cdot n} \tag{2.1}$$

albo

$$\boxed{K_n = K_0 + rK_0 \cdot n = K_0 (1 + rn).} \tag{2.2}$$

Innymi słowy, kapitał przy oprocentowaniu prostym wzrasta liniowo względem czasu ze współczynnikiem kierunkowym równym rK_0. Zauważmy też, że

$$K_{n+1} - K_n = K_0 + rK_0 \cdot (n+1) - (K_0 + rK_0 \cdot n) = rK_0,$$

czyli przy oprocentowaniu prostym kapitał wzrasta arytmetycznie.

Przykład 2.1. *Jaką wartość osiągnie kapitał początkowy* 500 *zł po:*

a) 4 *latach,*

b) 198 dniach

oprocentowania prostego, przy rocznej stopie 12% *i latach liczonych według reguły bankowej* (1 *rok* = 360 *dni)?*

Skorzystamy ze wzoru (2.2)

$$K_n = K_0 + rK_0 \cdot n.$$

Ad. a) Mamy: $K_0 = 500$ *zł,* $r = 0.12$, $n = \frac{364 \cdot 3 + 365}{360} = \frac{1457}{360}$, *stąd*

$$K = 500 + 0.12 \cdot 500 \cdot \frac{1457}{360} = 742.83 \text{ [zł]}.$$

Ad. b) Tym razem $n = \frac{198}{360}$,

$$K = 500 + 0.12 \cdot 500 \cdot \frac{198}{360} = 533 \text{ [zł]}.$$

Przykład 2.2. *W dniu 30 czerwca 2001 r. pan X miał na koncie a'vista 2500 zł. W okresie od 1 lipca do 30 września tego roku dokonano dwóch wpłat na konto: 12 lipca – 3259 zł i 17 sierpnia – 1600 zł oraz trzech wypłat: 23 lipca 4200 zł, 5 sierpnia – 1900 zł i 18 września – 300 zł. Odsetki dopisywane są na koniec każdego kwartału. Bank oblicza odsetki od dodatniego salda wg ustalonej stopy rocznej 12%, a w przypadku ujemnego salda – karne odsetki wg. ustalonej stopy rocznej powiększonej o 50%. Obliczyć odsetki za III kwartał 2001 roku. Czas bankowy biegnie według reguły kalendarzowej.*

Mamy tu do czynienia z oprocentowaniem prostym w każdym z okresów, kiedy kapitał na koncie nie ulegał zmianie. Do obliczeń wygodnie jest sporządzić tabelę

Data operacji	*Operacja*		*Saldo po operacji*	*Numer dnia w roku*	*Czas oprocentowania w dniach*
	wpłata	*wypłata*			
30 czerwca	–	–	2500	181	–
12 lipca	3250	–	5750	193	12
23 lipca	–	4200	1550	204	13
5 sierpnia	–	1900	−350	217	12
17 sierpnia	1600	–	1250	229	32
18 września	–	300	950	261	12
30 września	–	–	950	273	–

Do obliczenia odsetek skorzystamy ze wzoru (2.1)

$$
\begin{aligned}
I^1 &= 2500 \cdot 0.12 \cdot \frac{12}{365} = 9.86 \\
I^2 &= 5750 \cdot 0.12 \cdot \frac{11}{365} = 20.79 \\
I^3 &= 1550 \cdot 0.12 \cdot \frac{13}{365} = 6.62 \\
I^4 &= -350 \cdot 0.18 \cdot \frac{12}{365} = -2.07 \\
I^5 &= 1250 \cdot 0.12 \cdot \frac{32}{365} = 13.15 \\
I^6 &= 950 \cdot 0.12 \cdot \frac{12}{365} = 3.75
\end{aligned}
$$

Zatem za III kwartał wynoszą odsetki wynoszą

$$9.86 + 20.79 + 6.62 - 2.07 + 13.15 + 3.75 = 52.10$$

Kapitał końcowy na dzień 30 września, wynosi

$$950 + 52.10 = 1002.10 \text{ [zł].}$$

Często, aby obliczyć odsetki proste używamy oprócz stopy rocznej stopy miesięcznej lub kwartalnej. W tym wypadku miesiąc, kwartał itd. nazywamy ***podokresem oprocentowania*** (względem oprocentowania rocznego), a stopę procentową dla tego okresu – ***stopą podokresową***. Podokres może być, choć jest to stosowane rzadko, dłuższy niż rok np. może wynosić 2 lata.

Wprowadźmy oznaczenia:
k – liczba podokresów, których łączna długość jest równa długości roku,
i_k – stopa podokresowa,
m_k – czas wyrażony w podokresach (numer kolejnego podokresu).

Długość podokresu, przy ustalonym k, jest zawsze równa $\frac{1}{k}$ długości roku. W praktyce najczęściej mamy do czynienia z następującymi podokresami:

- półrocze, $k = 2$
- kwartał, $k = 4$,
- miesiąc, $k = 13$,
- tydzień, $k = 52$,
- dzień, $k = 365$ (lub 360).

Odsetki wg oprocentowania prostego za m_k podokresów wynoszą

$$\boxed{I_{m_k} = i_k K_0 \cdot m_k,}$$

a wartość kapitału

$$\boxed{K_{m_k} = K_0 \left(1 + i_k \cdot m_k\right).}$$

Przykład 2.3. *Pożyczka 1200 zł będzie spłacona jednorazowo po upływie* 4 *miesięcy z odsetkami prostymi przy miesięcznej stopie wynoszącej* 1.3%. *Obliczmy kwotę potrzebną do spłaty tej pożyczki.*

A zatem, $k = 12$, $m_{12} = 4$, $i_{12} = 0.013$, $K_0 = 1200$, *czyli*

$$K_4 = 1200 + 0.013 \cdot 1200 \cdot 4 = 1262 \text{ [zł]}.$$

2.2. Równoważność stóp procentowych.

Skoro możemy posługiwać się różnymi stopami (roczną lub podokresową) ważne jest ustalenie warunków równoważności tych stóp. Przede wszystkim doprecyzujmy, co oznacza równoważność stóp. Tę równoważność określa w matematyce finansowej następująca

Zasada równoważności stóp procentowych. *Stopy procentowe są równoważne w czasie n, jeżeli przy każdej z nich ten sam kapitał początkowy K_0, generuje w tym samym czasie n, będącym liczbą lat, te same odsetki.*

Dla ustalenia warunku równoważności stóp zauważmy najpierw, że jeżeli n jest liczbą lat, to odpowiadająca jej liczba m_k podokresów długości $\frac{1}{k}$ roku wynosi

$$\boxed{m_k = nk.} \tag{2.3}$$

Niech dane będą dwie stopy podokresowe i_{k_1} oraz i_{k_2} odpowiadające podokresom długości $\frac{1}{k_1}$ i $\frac{1}{k_2}$ roku. Odsetki generowane przez kapitał K_0 po upływie n lat są identyczne przy stopach i_{k_1} i i_{k_2}, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$i_{k_1} m_{k_1} K_0 = i_{k_2} m_{k_2} K_0,$$

gdzie wobec (2.3)

$$m_{k_1} = nk_1, \; m_{k_2} = nk_2,$$

skąd

$$i_{k_1} nk_1 K_0 = i_{k_2} nk_2 K_0.$$

W konsekwencji

$$\boxed{\frac{i_{k_1}}{i_{k_2}} = \frac{\frac{1}{k_1}}{\frac{1}{k_2}},} \tag{2.4}$$

co można słownie wyrazić następująco: *dwie stopy podokresowe są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ich stosunek jest identyczny jak stosunek długości odpowiadających im podokresów wyrażonych w latach.* Z tego powodu przy oprocentowaniu prostym stopy równoważne nazywamy ***proporcjonalnymi***.

Wzór (2.4) jest równoważny wzorowi

$$\boxed{i_{k_1} = i_{k_2} \frac{k_2}{k_1},} \tag{2.5}$$

który pozwala przeliczać równoważne stopy procentowe. W szczególności, z powyższego wzoru wynika, że jeśli i_k jest stopą odpowiadającą podokresowi długości $\frac{1}{k}$ roku, zaś r jest stopą roczną, to

$$\boxed{r = i_k k.}$$

Przykład 2.4. *Półroczna stopa oprocentowania prostego wynosi $i_2 = 18\%$. Obliczyć równoważne stopę miesięczną, 13–dniową, 2–letnią. Używając każdej z nich obliczyć odsetki proste od kapitału 400 zł za czas 3 lat. W obliczeniach używać reguły bankowej.*

W przypadku stopy miesięcznej mamy: $k = 12$ i wobec wzoru (2.5)

$$i_{12} = i_2 \frac{2}{12} = 18\% \cdot \frac{1}{6} = 3\%.$$

Dalej dla 3 lat $m_{12} = 12 \cdot 3 = 36$ oraz

$$I = i_{12} \cdot m_{12} \cdot K_0 = 0.03 \cdot 36 \cdot 400 = 432 \text{ [zł]}$$

Dla stopy 13–dniowej $k = \frac{360}{13}$ oraz

$$i_{\frac{360}{13}} = i_2 \frac{2}{\frac{360}{13}} = 18\% \cdot \frac{13}{180} = 1.3\%.$$

Mamy też, że dla 3 lat $m_{\frac{360}{13}} = \frac{360}{13} \cdot 3 = \frac{1080}{13}$ oraz

$$I = i_{\frac{360}{13}} \cdot m_{\frac{360}{13}} \cdot K_0 = 0.013 \cdot \frac{1080}{13} \cdot 400 = 432 \text{ [zł]}$$

Wreszcie dla stopy 2–letniej $k = \frac{1}{2}$,

$$i_{\frac{1}{2}} = i_2 \frac{2}{\frac{1}{2}} = 18\% \cdot 4 = 72\%$$

$m_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$

$$I = i_{\frac{1}{2}} \cdot m_{\frac{1}{2}} \cdot K_0 = 0.72 \cdot \frac{3}{2} \cdot 400 = 432 \text{ [zł]}.$$

Przykład 2.5. *Najniższa cena, po której kupiono 26–tygodniowe bony skarbowe wyniosła 9521.06 zł za bon o wartości 10000 zł. Obliczyć stopę zysku tych bonów w skali 26 tygodni i skali roku.*

Mamy więc

$$k = \frac{360}{26 \cdot 7}$$

oraz

$$i_k = \frac{10000 - 9521.06}{9521.06} = 0.0503 = 5.03\%,$$

co wynika ze wzoru

$$K = K_0 + i_k K_0.$$

W skali roku

$$r = i_k k = 5.03\% \frac{360}{26 \cdot 7} = 9.95\%.$$

2.3. Stopa zmienna w czasie, stopa przeciętna.

Załóżmy, że czas oprocentowania kapitału K_0 wynosi n lat i składa się z m następujących po sobie okresów o długości $n_1, n_2, ..., n_m$ lat, gdzie

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Załóżmy dalej, że w i–tym okresie obowiązuje stopa roczna r_i, $i = 1, 2, ..., m$. Wówczas odsetki proste w i–tym okresie wynoszą

$$\boxed{I_{n_i} = r_i n_i \cdot K_0.}$$

Łączne odsetki za okres n lat wynoszą więc

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{m} r_i n_i \cdot K_0 = K_0 \sum_{i=1}^{m} r_i n_i,}$$

zaś kapitał końcowy

$$\boxed{K = K_0 + K_0 \sum_{i=1}^{m} r_i n_i = K_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{m} r_i n_i\right).} \tag{2.6}$$

Możemy teraz wprowadzić pojęcie ***stopy przeciętnej*** $\bar{r}$ (za okres n lat) określonej za pomocą równości

$$\bar{r} n K_0 = K_0 \sum_{i=1}^{m} r_i n_i.$$

Czyli jest to stała stopa, jaka dałaby za n lat ten sam przyrost kapitału, co stopy zmienne. Wynika stąd, że

$$\boxed{\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} r_i n_i.}$$

Stopa przeciętna jest więc średnią stopą ważoną stóp $r_1, r_2, ..., r_m$ z wagami będącymi długościami poszczególnych okresów. W szczególności, jeśli okresy są jednakowe, stopa przeciętna jest średnią arytmetyczną stóp $r_1, r_2, ..., r_m$.

Przykład 2.6. *Pan X wpłacił 3600 zł na roczną lokatę z odsetkami naliczanymi po zakończeniu lokaty. Przez 4 miesiące obowiązywało oprocentowanie 6%, przez następne 3 miesiące 5.5%, a przez ostatnie 5 miesięcy 4.5% (wszystkie stopy w stosunku rocznym).*

Zgodnie z (2.6) wartość lokaty wynosi

$$K = 3600 \left(1 + 0.06 \cdot \frac{4}{12} + 0.055 \cdot \frac{3}{12} + 0.045 \cdot \frac{5}{12}\right) =$$
$$3600 \left(1 + \frac{1}{50} + \frac{11}{800} + \frac{3}{160}\right) = 3600 \cdot \frac{421}{400} = 3789 \text{ [zł]}.$$

Natomiast średnia stopa

$$\bar{r} = \frac{21}{400} = 0.0525 = 5.25\%.$$

2.4. Dyskontowanie proste.

Dyskontowaniem nazywamy obliczanie kapitału początkowego K_0 na podstawie wartości kapitału końcowego K. Różnicę D między kapitałem końcowym i początkowym nazywamy ***dyskontem***. Jeśli dyskontowanie odbywa się przy użyciu stopy procentowej r, to nazywamy je ***dyskontem prostym***. W matematyce finansowej stosuje się również *dyskontowanie handlowe* oparte na tzw. *stopie dyskontowej*. Zatem, przyjmując za n czas wyrażony w latach mamy, że

$$K = K_0 \left(1 + rn\right)$$

skąd

$$K_0 = K \left(1 + rn\right)^{-1}$$

oraz

$$D = K - K_0 = K - K \left(1 + rn\right)^{-1} = \frac{K + Krn - K}{1 + rn} = \frac{Krn}{1 + rn} = Krn \left(1 + rn\right)^{-1}.$$

Przykład 2.7. *Oprocentowanie rachunku bankowego wynosi 16% w skali roku. Przy jakiej wpłacie a) 1 kwietnia, b) 1 stycznia saldo na rachunku 1 stycznia następnego roku będzie wynosić 1000 zł?*

Mamy natychmiast
a)

$$K_0 = \frac{K}{1 + rn} = \frac{1000}{1 + 0.16 \cdot 0.75} = 892.86 \text{ [zł]},$$

b)

$$K_0 = \frac{1000}{1 + 0.16} = \frac{1000}{1 + 0.16} = 862.07 \text{ [zł]}.$$

Rozdział 3

Dyskonto handlowe proste.

3.1. Dyskonto handlowe.

Zapłata za pożyczenie pieniędzy może być zrealizowana w formie odsetek od pożyczonej kwoty. Nie jest to jednak jedyna forma zapłaty, omówimy teraz zapłatę za pożyczkę zwaną dyskontem.

Dyskontem handlowym nazywamy zapłatę za pożyczkę obliczoną za pomocą stopy dyskontowej na podstawie kwoty, którą dłużnik zwróci po ustalonym czasie, przy czym dyskonto jest płatne z góry (w momencie otrzymania pożyczki) i pomniejsza kwotę przekazanych pieniędzy.

Dyskonto handlowe bywa nazywane ***procentem płatnym z góry.*** Wartość dyskonta zależy od kwoty, którą mamy zwrócić oraz od czasu, na jaki pożyczamy pieniądze. Roczna stopa, przy użyciu której oblicza się wartość dyskonta nosi nazwę ***stopy dyskontowej***. Mamy

Zasada dyskonta handlowego (prostego). *Dyskonto jest obliczane od kwoty, którą dłużnik zwróci po ustalonym czasie, jest proporcjonalne do tego czasu i jest odejmowane od tej kwoty w momencie udzielenia pożyczki.*

Niech:

F – kwota spłaty (wartość nominalna pożyczki),
D – dyskonto,
P – wartość początkowa pożyczki (wartość nominalna po potrąceniu dyskonta)
d – roczna stopa dyskontowa,
n – czas od otrzymania do zwrotu pożyczki, wyrażony w latach.

Zgodnie z zasadą dyskonta handlowego:

$$\boxed{D = dF \cdot n} \tag{3.1}$$

oraz

$$\boxed{P = F - D = F\left(1 - dn\right).} \tag{3.2}$$

skąd również

$$\boxed{F = \tfrac{P}{1-dn}.} \tag{3.3}$$

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że wartość początkowa pożyczki nie może być ujemna czyli

$$F - D > 0$$

skąd dostajemy, że

$$dn < 1,$$

co oznacza, że przy danej stopie d czas udzielenia pożyczki musi spełniać warunek

$$\boxed{n < \tfrac{1}{d},} \tag{3.4}$$

zaś przy ustalonym czasie n stopa musi spełniać warunek

$$\boxed{d < \tfrac{1}{n}.} \tag{3.5}$$

Przykład 3.1. *Aby dziś dostać pożyczkę zobowiązujemy się oddać po 3 miesiącach 1500 zł. Jaka jest opłata za pożyczkę, jeśli ma ona postać dyskonta o stopie $d = 14\%$. Wobec (3.1)*

$$D = 0.14 \cdot 1500 \cdot \frac{3}{12} = 52.50 \text{ zł},$$

a zatem otrzymamy

$$P = F - D = 1500 - 52.50 = 1447.50 \text{ zł}.$$

Przykład 3.2. *Po koniec 2001 roku dużą popularnością cieszyły się w Polsce tzw. lokaty antypodatkowe z odsetkami płatnymi z góry w związku z 20% tzw. podatkiem Belki. Załóżmy, że dysponujemy kwotą 10000 zł i chcemy je zdeponować na pół roku mając do wyboru dwie oferty:*

- *w banku X półroczną lokatę z odsetkami płaconymi z góry przy stopie rocznej $d = 12\%$*
- *w banku Y półroczną, tradycyjną lokatę z oprocentowaniem $r = 15\%$ w stosunku rocznym.*

Która oferta jest lepsza?

W banku X pożyczka lokata ma charakter dyskontowy z kwotą początkową $P = 10000$ zł, musimy więc obliczyć kwotę końcową F :

$$F = \frac{P}{1 - dn} = \frac{10000}{1 - 0.12 \cdot \frac{1}{2}} = 10638.30 \text{ zł}$$

W banku Y mamy, że odsetki będą wynosiły

$$I = rPn = 0.15 \cdot 10000 \cdot \frac{1}{2} = 750.00 \text{ zł}$$

ale będą obciążone podatkiem, a zatem bank wypłaci nam

$$K = 10000 + 0.8 \cdot 750.00 = 10600.00 \text{ zł}.$$

Zatem, lepiej skorzystać z oferty banku X

Obliczymy jeszcze przy jakiej stopie r obie oferty są jednakowo opłacalne

$$\frac{P}{1-dn} = P + rPn \cdot 0.8$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-dn} &= 1 + rn \cdot 0.8\\ rn \cdot 0.8 &= \frac{1}{1-dn} - 1\\ rn \cdot 0.8 &= \frac{nd}{1-dn}\\ r &= \frac{1.25d}{1-dn} = \frac{1.25 \cdot 0.12}{1-0.12\frac{1}{2}} = 0.159\,6 = 15.96\%.\end{aligned}$$

3.2. Stopa dyskontowa a stopa procentowa.

Zajmiemy się odpowiedzią na pytanie kiedy stopa dyskontowa i procentowa wygenerują w jednakowym czasie jednakowe odsetki. Takie stopę nazywamy równoważnymi.

Zasada równoważności stopy dyskontowej i procentowej. *Roczna stopa dyskontowa d i roczna stopa procentowa r są równoważne w czasie n, jeśli dyskonto i odsetki obliczane przy tych stopach dla tej samej pożyczki są równe.*

Wyprowadzimy teraz analityczny warunek równoważności obu stóp. Skoro (przy oznaczeniach przyjętych w tym oraz poprzednim rozdziale) $D = I$ przy warunku $K_0 = P$, więc wobec (3.1)

$$dFn = rPn,$$

skąd uwzględniając (3.3)

$$\frac{P}{1-dn} = rP,$$

czyli

$$\boxed{r = \tfrac{d}{1-dn}} \tag{3.6}$$

oraz

$$\boxed{d = \tfrac{r}{1+rn}.} \tag{3.7}$$

Ze wzorów (3.6)-(3.7) wynika

Własność 3.1.

1. *Wysokość równoważnych stóp nie zależy od kwoty udzielonej pożyczki, ale zależy od czasu na jaki ją udzielono.*

2. *Istnieje dokładnie jeden okres n, w którym stopy są równoważne (zwany* ***okresem równoważności stóp dyskontowej i procentowej****), wynosi on*

$$n = \frac{1}{d} - \frac{1}{r}. \tag{3.8}$$

3. *Okres równoważności stóp d i n jest dodatni (wynika, to z warunku (3.4)).*

4. *Dla każdego okresu n i każdej stopy procentowej r istnieje równoważna w okresie n stopa dyskontowa d.*

5. *Dla każdej stopy dyskontowej d i każdego okresu n spełniającego warunek $nd < 1$ istnieje równoważna w okresie n stopa r.*

Zauważmy też, że warunkiem, aby wartość początkowa pożyczki przy dyskoncie przy okresie pożyczki n była dodatnia była nierówność $n < \frac{1}{d}$, która dla okresu równoważności otrzymanego w (3.8) jest oczywiście spełniona.

Przykład 3.3. *Powróćmy do przykładu, w którym rozważaliśmy inwestycję w 26 tygodniowe bony skarbowe o wartości 10000 zł. Nominalna cena zakupu tych bonów wynosiła 9521.06 zł. Przyjmijmy $F = 10000$ zł, $P = 9521.06$ zł, $n = \frac{26 \cdot 7}{360}$. Roczna stopa dyskonta wynosiła więc*

$$d = \frac{D}{nF} = \frac{F-P}{nF} = \frac{10000 - 9521.06}{\frac{26 \cdot 7}{360} \cdot 10000} = 0.0947 = 9.47\%.$$

Roczna stopa rentowności tej inwestycji jest równa

$$r = \frac{D}{nP} = \frac{10000 - 9521.06}{\frac{26 \cdot 7}{360} \cdot 9521.06} = 0.0995 = 9.95\%.$$

Jest to oczywiście roczne oprocentowanie pożyczki 9521.06, której wartość wraz z odsetkami wyniosłaby po 26 tygodniach 10000 zł.

Powyższy przykład uzmysławia nam następujące spostrzeżenie.

Własność 3.2. *Roczna stopa zysku (rentowności) z transakcji, w której opłatą jest dyskonto obliczone przy stopie d za czas n jest roczną stopą procentową r równoważną stopie d w czasie n.*

Dowód. Rzeczywiście, roczna stopa zysku wynosi w tym wypadku

$$\frac{D}{nP} = \frac{I}{nP} = r.$$

■

W praktyce duże znaczenie ma

Własność 3.3. *Niech d i r będą stopami rocznymi dyskontową i procentową odpowiednio równoważnymi w okresie $\bar{n}$. Niech D będzie wartością dyskonta, zaś I wartością odsetek przy pożyczce na n lat ($n < \frac{1}{d}$). Wówczas*

1. $$D > I \Leftrightarrow n > \bar{n},$$

2. $$D < I \Leftrightarrow n < \bar{n}.$$

Dowód. Niech P będzie wartością początkową pożyczki, F – kwotą spłaty pożyczki dyskontowej o wartości początkowej P po n latach.. Mamy wobec (3.1), (3.2) oraz (3.6), że

$$D = dFn,$$

$$I = rPn = rF(1-dn)n = \frac{d}{1-d\bar{n}}F(1-dn)n = \frac{1-dn}{1-d\bar{n}} \cdot dFn.$$

Zatem

$$\frac{D}{I} = \frac{1-d\bar{n}}{1-dn}.$$

W konsekwencji (przy założeniu, że $n < \frac{1}{d}$)

$$D > I \Leftrightarrow \frac{1-d\bar{n}}{1-dn} > 1 \Leftrightarrow n > \bar{n}$$

oraz

$$D < I \Leftrightarrow \frac{1-d\bar{n}}{1-dn} < 1 \Leftrightarrow n < \bar{n}$$

teraz $n > \bar{n}$, to $D > I$, jeśli $n < \bar{n}$, to $D < I$. ■

Mamy również

Własność 3.4. *Niech n oznacza czas od otrzymania do zwrotu pożyczki, I wartość odsetek za czas n przy stopie rocznej stopie procentowej r, zaś D wartość dyskonta tej samej pożyczki za czas n lat przy rocznej stopie dyskontowej d ($n < \frac{1}{d}$). Wówczas:*

1.
$$D > I \Leftrightarrow r < \frac{d}{1-dn} \Leftrightarrow d > \frac{r}{1+rn}.$$

2.
$$D < I \Leftrightarrow r > \frac{d}{1-dn} \Leftrightarrow d < \frac{r}{1+rn}.$$

Dowód. Mamy wobec (3.3)

$$F = \frac{P}{1-dn}$$

$$\frac{D}{I} = \frac{dF}{rP} = \frac{dP}{1-dn} \cdot \frac{1}{rP} = \frac{d}{1-dn} \cdot \frac{1}{r},$$

skąd (przy założeniu $n < \frac{1}{d}$)

$$D > I \Leftrightarrow \frac{d}{1-dn} \cdot \frac{1}{r} > 1 \Leftrightarrow r < \frac{d}{1-dn} \Leftrightarrow d > \frac{r}{1+rn}$$

oraz

$$D < I \Leftrightarrow r > \frac{d}{1-dn} \Leftrightarrow d < \frac{r}{1+rn}$$

■

3.3. Weksle.

Weksel stanowi zobowiązanie do zapłaty określonej kwoty w ustalonym terminie i ma formę dokumentu sprecyzowanego odpowiednimi przepisami. Kwotę, do zapłaty której zobowiązuje weksel nazywamy ***wartością nominalną weksla.*** Termin, w którym weksel ma być spłacony nazywamy ***terminem wykupu weksla***. Wartość weksla obliczoną na podstawie jego wartości nominalnej przy ustalonej stopie dyskontowej d na określony dzień poprzedzający poprzedzający termin jego wykupu nazywamy ***wartością handlową (aktualną) weksla.***

Ponieważ weksel stanowi formę pożyczki liczonej według zasady dyskonta handlowego, zastępujemy dotychczas stosowaną terminologię dotyczącą dyskonta handlowego w następujący sposób:

- kwota spłaty F – wartość nominalna weksla,
- opłata za pożyczkę (dyskonto) D – wartość dyskonta weksla,
- wartość początkowa pożyczki $P = F - D$ – wartość aktualna weksla,
- czas od otrzymania do zwrotu pożyczki n – czas do wykupu weksla.

W konsekwencji, aktualna wartość weksla o wartość nominalnej F, przy stopie dyskontowej (rocznej) d na n lat przed wykupem wynosi

$$P = F\left(1 - dn\right).$$

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że w odniesieniu do weksli czas w dniach zamienia się na lata według reguły bankowej (1 rok = 360 dni).

Przykład 3.4. *Zobowiązanie do zapłaty za dostawę pewnego towaru o wartość 195 jp (jednostek pieniężnych) ma postać weksla podpisanego 3 lipca na sumę 200 jp z terminem wykupu 3 października tego samego roku.*

Mamy więc

$$\begin{aligned} F &= 200, \\ P &= 195, \\ D &= F - P = 5. \end{aligned}$$

Czas do wykupu wyrażony w dniach (wg tabeli)

$$276 - 183 = 92 \textit{ dni;}$$

wyrażony w latach

$$n = \frac{92}{360}.$$

Stopa dyskontowa

$$d = \frac{D}{nF} = \frac{5}{200 \cdot \frac{92}{360}} = \frac{5}{5 \cdot \frac{92}{9}} = \frac{9}{92} = 9.78\%.$$

Równoważna stopa procentowa przy czasie n wynosi

$$r = \frac{d}{1-dn} = \frac{\frac{9}{92}}{1 - \frac{9}{92} \cdot \frac{92}{360}} \frac{\frac{9}{92}}{1 - \frac{1}{40}} = \frac{9}{92} \cdot \frac{40}{39} = \frac{3}{23} \cdot \frac{10}{13} = \frac{30}{299} = 10.03\%.$$

Oznacza to, że gdybyśmy 3 lipca pożyczyli 195 jp, to zwrot 3 października 200 jp oznaczałby stopę procentową 10.03%. *Innymi słowy pożyczka byłaby korzystniejsza od wystawienia weksla przy stopie mniejszej niż* 10.03%. *Wynika to również bezpośrednio z własności 3.4.*

Przykład 3.5. *Firma X rozważa dwa warianty pozyskania potrzebnych jej środków: wystawienie weksla o terminie wykupu za 90 dni przy stopie dyskontowej* $d = 16\%$, *albo 90 dniowa pożyczka przy stopie rocznej* $r = 17\%$. *Która opcja jest korzystniejsza.*

Mamy

$$\frac{d}{1-dn} = \frac{0.16}{1 - 0.16 \cdot \frac{90}{360}} = \frac{0.16}{1 - \frac{16}{100} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{16}{100} \cdot \frac{100}{96} = \frac{1}{6} = 16.67\% < r.$$

Zatem z własności 3.4 wynika, że weksel jest bardziej opłacalny. Możemy również obliczyć czas $\bar{n}$, *przy którym obie stopy są równoważne. Z (3.8) mamy*

$$\bar{n} = \frac{1}{d} - \frac{1}{r} = \frac{100}{16} - \frac{100}{17} = \frac{25 \cdot 17 - 400}{68} = \frac{25}{68} = 0.367\,647\,058\,8$$

to jest

$$0.367\,647\,058\,8 \cdot 360 = 132.352\,941\,2 \ \textit{dni}.$$

Z własności 3.3 pożyczka byłaby korzystniejsza dla czasu co najmniej 133 dni.

Rozdział 4

Procent składany

4.1. Zasada oprocentowania składanego.

Przypomnijmy, że w przypadku oprocentowania prostego odsetki są dopisywane do kapitału dopiero po zakończeniu czasu oprocentowania. Taki proces nazywa się kapitalizacją. Gdy jednak odsetki powiększają kapitał w równych odstępach czasu, przed upływem czasu oprocentowania mamy do czynienia z procentem składanym. Czas, po upływie którego odsetki są za każdym razem dopisywane do kapitału nazywa się okresem kapitalizacji.

Zasada oprocentowania składanego. *Oprocentowanie składane polega na tym, że odsetki (proste) oblicza się za każdy ustalony z góry okres i kapitalizuje się je na koniec tego okresu.*

Omówimy trzy zasadnicze typy oprocentowania składanego związane z różnymi okresami kapitalizacji.

4.2. Kapitalizacja roczna.

Przypuśćmy, że dany jest kapitał początkowy $K_0 > 0$ i roczna stopa procentowa r, a odsetki są kapitalizowane co rok. Niech n oznacza okres oprocentowania wyrażony w latach. Przy kapitalizacji rocznej musimy poczynić założenie, że $n \in \mathbb{N}\,(:= \{1, 2, \ldots\})$. Obliczmy wartość kapitału po upływie kolejnych lat:

$$\begin{array}{ll}
\text{po roku} & K_1 = K_0 + rK_0 = K_0\,(1+r) \\
\text{po dwóch latach} & K_2 = K_1 + rK_1 = K_1\,(1+r) = K_0\,(1+r)^2 \\
\vdots & \vdots \\
\text{po } n \text{ latach} & K_0\,(1+r)^n
\end{array}$$

Zatem, po upływie n lat kapitał K_n wynosi:

$$\boxed{K_n = K_0\,(1+r)^n\,,} \tag{4.1}$$

zaś łączne odsetki po upływie n lat:

$$\boxed{I_n = K_n - K_0 = K_0\left((1+r)^n - 1\right).} \tag{4.2}$$

Równania (4.1)-(4.2) stanowią ***model oprocentowania składanego przy kapitalizacji rocznej***, albo krócej: ***model kapitalizacji rocznej.*** Widzimy też, że przy modelu rocznym kapitał wzrasta geometrycznie z ilorazem $(1+r)$. Model ten może być więc opisany za pomocą równania różnicowego postaci

$$K_{n+1} = K_n\,(1+r)^n\,, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Łatwo widać, że przy danym kapitale początkowym K_0 i końcowym K_n $(K_n > K_0)$ za n lat roczna stopa oprocentowania wynosi

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1, \tag{4.3}$$

zaś przy danym kapitale początkowym K_0, końcowym K_n $(K_n > K_0)$ i stopie rocznej r czas oprocentowania n (wyrażony w latach) wynosi

$$n = \log_{1+r}\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+r)}. \tag{4.4}$$

W tym drugim przypadku należy dodatkowo założyć, że K_0, K_n i r są tak dobrane, że $\frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+r)}$ jest liczbą naturalną.

Przykład 4.1. *Rozważmy pięcioletnią lokatę w wysokości $K_0 = 10000$ zł przy czym:*

(a) odsetki są naliczane po jej zakończeniu a stopa procentowa wynosi $r = 12\%$,

(b) lokata jest kapitalizowana corocznie a stopa procentowa wynosi $\tilde{r} = 10\%$.

W pierwszym przypadku wartość końcowa kapitału wynosi

$$K_5 = K_0\,(1+rn) = 10000\,(1 + 0.12 \cdot 5) = 16000.00 \text{ zł},$$

w drugim

$$\tilde{K}_5 = K_0\,(1+\tilde{r})^n = 10000\,(1+0.1)^5 = 16100.00 \text{ zł}.$$

Widzimy więc, że pomimo niższej stopy kapitalizacja jest bardziej opłacalna. Możemy się też zastanowić jaka stopa roczna $\bar{r}$ bez kapitalizacji wygeneruje po 5 latach ten sam kapitał co stopa $\tilde{r}$ z kapitalizacją:

$$\bar{r} = \frac{\frac{\tilde{K}_5}{K_0} - 1}{n} = \frac{\frac{16100}{10000} - 1}{5} = 12.20\%,$$

i na odwrót, jaka stopa roczna $\hat{r}$ z kapitalizacją wygeneruje po 5 latach ten sam kapitał co stopa roczna r bez kapitalizacji

$$\hat{r} = \sqrt[5]{\frac{K_5}{K_0}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{16000}{10000}} - 1 \approx 9.856\%.$$

4.3. Kapitalizacja podokresowa

Przypuśćmy, że odsetki dopisywane są za każdym razem po upływie czasu krótszego niż 1 rok. Wtedy taki okres nazywamy ***podokresem kapitalizacji***. Oczywiście kapitał będzie wzrastał dokładnie wg tej samej zasady co przy kapitalizacji rocznej, pod warunkiem że do jego opisu będziemy używać stopy z związanej z tym podokresem czyli ***stopy podokresowej***. Pojęcie stopy podokresowej pojawiło się przy omawianiu oprocentowania prostego. W przypadku kapitalizacji podokresowej jest ona równa procentowi, o jaki wzrasta kapitał za każdym razem po upływie jednego podokresu. Liczbę podokresów kapitalizacji przypadających na jeden rok nazywa się ***częstotliwością kapitalizacji***.

Wprowadzając oznaczenia analogiczne jak dla oprocentowania prostego przyjmijmy
k – częstotliwość kapitalizacji („ile razy w roku dopisywane są odsetki"),
m_k – czas oprocentowania wyrażony w liczbie podokresów (zakładamy, że $m_k \in \mathbb{N}$),
i_k – stopa podokresowa.

Wtedy, rozumując analogicznie jak dla kapitalizacji rocznej dostajemy, że kapitał K_{m_k} po upływie czasu m_k (czyli na koniec m_k – *tego* podokresu), przy kapitale początkowym K_0 wynosi

$$\boxed{K_{m_k} = K_0 \left(1 + i_k\right)^{m_k},}$$

a łączne odsetki po upływie czasu m_k wynoszą

$$\boxed{I_{m_k} = K_0 \left(\left(1 + i_k\right)^{m_k} - 1\right).}$$

Przykład 4.2. *Niech wartość początkowa kapitału wynosi $K_0 = 1000$ zł. Kapitał rośnie według oprocentowania składanego z kapitalizacją kwartalną ($k = 4$) i stopą kwartalną $i_4 = 6\%$. Wówczas okres 2 lat stanowi 8 podokresów ($m_k = 8$). Kapitał końcowy wynosi więc*

$$K_8 = K_0 \left(1 + i_k\right)^{m_k} = 1000 \left(1 + 0.06\right)^8 = 1593.85 \text{ zł.}$$

Często warunki oprocentowania z kapitalizacją podokresową z częstotliwością kapitalizacji k razy w roku mogą być podane przy użyciu tak zwanej ***rocznej stopy nominalnej*** r_k (a nie podokresowej i_k). W tym wypadku podawana roczna stopa nominalna r_k jest definiowana jako stopa proporcjonalna do stopy podokresowej, dokładniej

$$\boxed{r_k := k \cdot i_k.}$$

Kapitał po upływie m_k okresów przy powyższych warunkach oprocentowania i przy kapitale początkowym K_0 będzie wynosić

$$\boxed{K_{m_k} = K_0 \left(1 + \tfrac{r_k}{k}\right)^{m_k},}$$

albo, jeśli zamiast czasu wyrażonego w liczbie podokresów użyjemy odpowiadającego mu czasu wyrażonego w n latach,

$$\boxed{K_n = K_0 \left(1 + \tfrac{r_k}{k}\right)^{nk}.}$$

Warto również zwrócić uwagę, że o ile stopa podokresowa wyrażała procent o jaki wzrośnie nas kapitał w ciągu jednego okresu kapitalizacji, to stopa roczna nominalna już takiej własności nie posiada (chyba, że podokres jest równy 1 rok co, choć formalnie poprawne, podważa praktyczny sens użycia określenia „podokres").

Używając rocznej stopy nominalnej można wprowadzić jeszcze jeden współczynnik mierzący szybkość wzrostu kapitału. Przy poprzednich oznaczeniach zbadajmy iloraz wartości kapitału po dwóch następujących po sobie latach

$$\frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{K_0\left(1+\frac{r_k}{k}\right)^{nk+k}}{K_0\left(1+\frac{r_k}{k}\right)^{nk}} = \left(1+\frac{r_k}{k}\right)^k.$$

Współczynnik ten oznaczany przez ρ_k nie zależy od n i zwany jest ***rocznym czynnikiem oprocentowania***. Informuje on ile razy zwiększa się kapitał po upływie roku. Ma on następującą (dość jasną intuicyjnie własność)

Własność 4.1. *Przy ustalonej rocznej stopie nominalnej roczny czynnik oprocentowania jest tym większy (czyli kapitał rośnie tym szybciej), im krótszy jest okres kapitalizacji.*

4.4. Kapitalizacja ciągła

Przypuśćmy, że dana jest roczna stopa nominalna r_c. Jeśli założymy, że częstotliwość kapitalizacji k może wzrastać nieograniczenie (czyli okres kapitalizacji staje się nieskończenie mały, dodatni), to przy założeniu, że stopa r_c jest niezmienna dostajemy, że po n latach kapitał K_n, którego wartość początkowa była K_0 będzie wynosić

$$K_n = \lim_{k\to\infty} K_0\left(1+\frac{r_c}{k}\right)^{nk} = \lim_{k\to\infty} K_0\left(\left(1+\frac{r_c}{k}\right)^{\frac{k}{r_c}}\right)^{nr_c} = K_0 e^{r_c n}. \tag{4.5}$$

Zauważmy, że powyższy wzór ma sens nie tylko dla $n \in \mathbb{N}$, n może być liczbą rzeczywista dodatnią, musimy tylko pamiętać, że odpowiada upływowi czasu wyrażonego w jednostce 1 rok. Z tego powodu wygodniej będzie dla oznaczania czasu używać litery t. Zatem, w chwili $t \geq 0$ wartość kapitału $K(t)$ podlegającego oprocentowaniu ciągłemu (z kapitalizacją „co nieskończenie krótki czas") z roczną stopą nominalną r_c wynosi

$$\boxed{K(t) = K(0)e^{r_c t}.} \tag{4.6}$$

Jeżeli założymy, że zamiast wartości kapitału początkowego w chwili $t = 0$ znana jest wartość kapitału w chwili $t = t_0$, to jego wartość w dowolnej chwili $t \geq t_0$ wynosić będzie

$$\boxed{K(t) = K(t_0)e^{r_c(t-t_0)}.} \tag{4.7}$$

Wreszcie, jeśli przyjmiemy $r = e^{r_c} - 1$, to wzór (4.7) przyjmie postać

$$\boxed{K(t) = K(t_0)(1+r)^{(t-t_0)}.} \tag{4.8}$$

Wzory (4.5)-(4.8) opisują więc model oprocentowania składanego przy kapitalizacji ciągłej („co nieskończenie krótki czas") zwany również ***modelem kapitalizacji ciągłej***. Łatwo sprawdzić, podstawiając we wzorze (4.8) $t = t_0 + 1$, że r jest roczną stopą efektywną, czyli w ciągu roku kapitał początkowy podlegający modelowi (4.8) wzrośnie o dokładnie $r\%$.

Powyższy model można również wyprowadzić następująco. Przypuśćmy, że kapitalizacja odbywa się co Δt lat (Δt nie musi być wielkością całkowitą). Wówczas, jeśli w chwili t wartość kapitału wynosiła $K(t)$ oraz kapitalizacja nastąpi w chwili $t + \Delta t$, to

$$K(t + \Delta t) = K(t) + K(t)\, r_c \Delta t$$

stąd

$$\frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = r_c K(t).$$

Gdyby okres kapitalizacji był nieskończenie krótki, to

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = r_c K(t)$$

czyli

$$K'(t) = r_c K(t). \tag{4.9}$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest każda funkcja postaci,

$$K(t) = ce^{r_c t},$$

gdzie c jest dowolną stałą. Zakładając, że w chwili początkowej $t = 0$ wartość kapitału wynosiła K_0 mamy, że

$$K_0 = c,$$

skąd

$$K(t) = K_0 e^{r_c t}.$$

Tak jak poprzednio musimy pamiętać, że powyższe rozumowanie jest prawdziwe, jeśli jednostką czasu t jest 1 rok.

Równanie (4.9) mówi, że przy kapitalizacji ciągłej prędkość wzrostu kapitału w chwili t jest proporcjonalna do jego wielkości, zaś współczynnik tej proporcjonalności interpretujemy jako roczną stopę nominalną.

4.5. Równoważność stóp procentowych oprocentowania składanego.

Zajmiemy się teraz problemem równoważności stóp procentowych w oprocentowaniu składanym. Przypomnijmy ogólną definicję stóp równoważnych. Dwie stopy procentowe i_{k_1} i i_{k_2} są równoważne w czasie n, jeśli przy tym samym kapitale początkowym K_0 generują w czasie n identyczne odsetki albo, co na jedno wychodzi generują ten sam kapitał końcowy K_n. Definicja ta, wprowadzona przez nas w rozdziale dotyczącym oprocentowania prostego obowiązuje bez względu na rodzaj oprocentowania.

Podamy analityczny warunek równoważności dwóch stóp procentowych. Zajmijmy się najpierw oprocentowaniem składanym z kapitalizacją dyskretną.

Rozważmy dwa modele oprocentowania składanego. W pierwszym mamy do czynienia z kapitalizacją k_1 razy w roku i stopą podokresową i_{k_1} (związaną z podokresem $\frac{1}{k_1}$), w drugim z kapitalizacją k_2 razy w roku i stopą podokresową i_{k_2} (związaną z podokresem

$\frac{1}{k_2}$). Niech dany będzie kapitał początkowy K_0 oraz czas n lat. Wówczas, stopy i_{k_1} oraz i_{k_2} są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$K_0 \left(1 + i_{k_1}\right)^{nk_1} = K_0 \left(1 + i_{k_2}\right)^{nk_2}$$

zatem

$$\boxed{\left(1 + i_{k_1}\right)^{k_1} = \left(1 + i_{k_2}\right)^{k_2}.}$$

Ta sama zależność przy użyciu rocznych stóp nominalnych r_{k_1} i r_{k_2} proporcjonalnych do stóp i_{k_1} i i_{k_2} odpowiednio ma postać

$$\boxed{\left(1 + \tfrac{r_{k_1}}{k_1}\right)^{k_1} = \left(1 + \tfrac{r_{k_2}}{k_2}\right)^{k_2}.}$$

Wreszcie, przy użyciu rocznych czynników oprocentowujących ρ_{k_1} i ρ_{k_2} (odpowiadających stopom r_{k_1} i r_{k_2} odpowiednio) dostajemy warunek równoważności w postaci

$$\boxed{\rho_{k_1} = \rho_{k_2}.}$$

Oczywiście, z powyższych wzorów wynika, że równoważność stóp procentowych nie zależy od kapitału początkowego, ani czasu oprocentowania. Tym samym udowodniliśmy

Własność 4.2. *Niech i_{k_1} oraz i_{k_2} będą stopami podokresowymi i_{k_1} oraz i_{k_2} odpowiadającymi podokresom kapitalizacji k_1 i k_2, zaś r_{k_1}, r_{k_2} rocznymi stopami nominalnymi oraz ρ_{k_1}, ρ_{k_2} rocznymi czynnikami oprocentowującymi odpowiadającymi stopom i_{k_2}, i_{k_2} odpowiednio. Wówczas następujące warunki są równoważne*

(1) *stopy i_{k_1} oraz i_{k_2} są równoważne,*

(2) $\left(1 + i_{k_1}\right)^{k_1} = \left(1 + i_{k_2}\right)^{k_2}$,

(3) $\left(1 + \frac{r_{k_1}}{k_1}\right)^{k_1} = \left(1 + \frac{r_{k_2}}{k_2}\right)^{k_2}$,

(4) $\rho_{k_1} = \rho_{k_2}$.

Z powyższej własności łatwo wynika, że jeżeli i_{k_1} jest stopą podokresową odpowiadającą podokresowi kapitalizacji k_1, to równoważna stopa podokresowa i_{k_2} odpowiadająca podokresowi kapitalizacji k_2 wyraża się wzorem

$$\boxed{i_{k_2} = \left(1 + i_{k_1}\right)^{\frac{k_1}{k_2}} - 1.}$$

W szczególności, stopa roczna (odpowiadająca okresowi kapitalizacji 1 raz w roku) równoważna stopie i_k odpowiadającej podokresowi k nazywana ***stopą efektywną***, jest oznaczana symbolem r_{ef} i wynosi

$$\boxed{r_{ef} = \left(1 + i_k\right)^k - 1 = \rho_k - 1,} \tag{4.10}$$

gdzie ρ_k oznacza roczny czynnik oprocentowania dla stopy podokresowej i_k. Ponieważ roczny czynnik oprocentowania mierzy ile razy powiększy się kapitał w ciągu roku, to stopa efektywna informuje nas o ile procent powiększy się ten kapitał w ciągu roku.

Stopa podokresowa i_k odpowiadająca okresowi kapitalizacji k równoważna stopie efektywnej r_{ef} wynosi natomiast

$$\boxed{i_k = (1 + r_{ef})^{\frac{1}{k}} - 1.}$$

Wreszcie, jeśli r_{k_1} jest roczną stopą nominalną odpowiadającą podokresowi kapitalizacji k_1, to jak łatwo sprawdzić, równoważna roczna stopa nominalna r_{k_2} odpowiadająca podokresowi kapitalizacji k_2 wyraża się wzorem

$$\boxed{r_{k_2} = \left(\left(1 + \frac{r_{k_1}}{k_1}\right)^{\frac{k_1}{k_2}} - 1\right) k_1.}$$

Jeżeli teraz porównamy kapitalizację ciągłą przy rocznej stopie nominalnej r_c z kapitalizacją k razy w roku i stopą podokresową i_k, to te dwie stopy są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\boxed{e^{r_c} = (1 + i_k)^k .}$$

W szczególności, stopa efektywna równoważna stopie r_c wynosi

$$\boxed{r_{ef} = e^{r_c} - 1 = \rho_c - 1.}$$

Na zakończenie zajmiemy się problemem równoważności stóp procentowych przy oprocentowania składanym i prostym. Niech i_k będzie stopą podokresową odpowiadającą podokresowi k, zaś r roczną stopą procentową przy oprocentowaniu prostym. Wówczas, w myśl zasady równoważności stóp stopy są równoważne w okresie n lat wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\boxed{(1 + i_k)^{nk} = 1 + rn.}$$

Równoważność stóp oprocentowania prostego i złożonego zależy więc od okresu oprocentowania. Można udowodnić, że jeśli te dwie stopy są równoważne w okresie n, to nie są równoważne w żadnym innym okresie.

4.6. Stopa zmienna w czasie, stopa przeciętna.

Przypuśćmy, że kapitał K_0 został złożony na n lat z kapitalizacją roczną, przy czym w kolejnych latach obowiązywały stopy $r^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., n$. Wtedy wartość kapitału w kolejnych latach wynosi

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \left(1 + r^{(1)}\right), \\ K_2 &= K_0 \left(1 + r^{(1)}\right)\left(1 + r^{(2)}\right), \\ &\ldots \end{aligned}$$

Indukcyjnie dowodzimy, że wartość kapitału po n latach wynosi

$$\boxed{K_n = K_0 \prod_{i=1}^{j} \left(1 + r^{(i)}\right),} \tag{4.11}$$

zaś łączne odsetki po n latach

$$\boxed{I_n = K_0 \left(\prod_{i=1}^{j} \left(1 + r^{(i)}\right) - 1\right).} \tag{4.12}$$

Powyższe wzory opisują ***model oprocentowania składanego rocznego przy zmiennej stopie.***

Możemy wprowadzić dla tego modelu ***stopę przeciętną (roczną)*** $\bar{r}$ jako stopę roczną, która wygeneruje po okresie n lat ten sam kapitał K_n, zatem

$$K_0 \left(1+\bar{r}\right)^n = K_0 \prod_{i=1}^{n} \left(1+r^{(i)}\right),$$

skąd

$$\boxed{\bar{r} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} (1+r^{(i)})} - 1.} \tag{4.13}$$

Jeśli oznaczymy przez $\bar{\rho}$ ***przeciętny roczny czynnik oprocentowujący*** odpowiadający stopie przeciętnej, to

$$\boxed{\bar{\rho} = \bar{r} + 1 = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} (1+r^{(i)})},}$$

możemy więc powiedzieć, że przeciętny roczny czynnik oprocentowujący jest średnią geometryczną rocznych czynników oprocentowujących w kolejnych latach okresu n lat.

Uogólniając powyższe wzory, jeśli stopy $i^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., m$ są stopami okresowymi (niekoniecznie rocznymi) w kolejnych okresach, to wartość końcowa kapitału początkowego K_0 złożonego na czas m podokresów (z kapitalizacją na koniec każdego okresu) wynosi

$$\boxed{K_m = K_0 \prod_{j=1}^{m} \left(1+i^{(j)}\right),} \tag{4.14}$$

zaś stopa przeciętna w czasie m podokresów, zwana $m-$***okresową stopą przeciętną***, $\bar{\imath}$ wynosi

$$\boxed{\bar{\imath} = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} (1+i^{(j)})} - 1.} \tag{4.15}$$

Zauważmy, że wobec wzoru (4.14) $m-$***okresowy czynnik oprocentowujący*** ρ_m (rozumiany jako wielkość o jaką zmieni się kapitał po upływie m podokresów) wynosi

$$\boxed{\rho = \prod_{j=1}^{m} \left(1+i^{(j)}\right),} \tag{4.16}$$

natomiast $m-$***okresowa stopa efektywna*** r (czyli o jaki procent zmieni się kapitał po upływie m podokresów) wynosi

$$\boxed{r = \rho_m - 1 = \prod_{j=1}^{m} \left(1+i^{(j)}\right) - 1} \tag{4.17}$$

Rozważmy teraz sytuację, w której kapitał K_0 został złożony na n lat z kapitalizacją ciągłą, przy czym w kolejnych latach obowiązywały nominalne stopy nominalne $r_c^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., n$. Wtedy kapitał K_n po n latach ma wartość

$$K_n = K_0 e^{r_c^{(1)}} e^{r_c^{(2)} ... r_c^{(n)}} = K_0 e^{\sum_{j=1}^{n} r_c^{(j)}},$$

zaś ***roczna nominalna stopa średnia*** r_c oprocentowania ciągłego spełnia warunek

$$e^{r_c n} = e^{\sum_{j=1}^{n} r_c^{(j)}},$$

i wynosi

$$\boxed{r_c = \tfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} r_c^{(j)},}$$

czyli jest średnią arytmetyczną stóp $r_c^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., n$.

4.7. Dyskontowanie składane.

Zajmiemy się teraz operacją odwrotną do obliczania kapitału końcowego na podstawie kapitału początkowego, który podlegał oprocentowaniu składanemu, czyli operacją dyskontowania.

Przypuśćmy, że znamy wartość kapitału końcowego K_n, który powstał z kapitału początkowego K_0 zdeponowanego na n lat przy oprocentowaniu składanym. Rozważmy dwa przypadki:

1. Okres kapitalizacji wynosi rok i roczna stopa procentowa jest równa r. Wtedy z zależności
$$K_n = K_0 (1+r)^n$$
dostajemy natychmiast, że
$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}.$$
2. Kapitalizacja jest ciągła z roczną stopą r_c. Wówczas
$$K_n = K_0 e^{r_c n},$$
skąd
$$K_0 = e^{-r_c n} K_n.$$

W obydwu przypadkach wartość dyskonta (czyli różnica między kapitałem końcowym i początkowym) jest równa wartości łącznych odsetek od kapitału K_0.

Czynniki $\frac{1}{1+r}$ oraz e^{-r_c} nazywają się ***rocznymi czynnikami dyskontującymi*** przy kapitalizacji rocznej i ciągłej odpowiednio. Jest to współczynnik ν przez jaki trzeba pomnożyć kapitał na koniec dowolnego roku, aby otrzymać kapitał na początku tego roku tzn,
$$K_n = \nu K_{n+1},$$
Obliczając ***roczną stopę dyskontową*** d, czyli o ile procent trzeba zmniejszyć kapitał K_{n+1} na koniec dowolnego roku, aby otrzymać kapitał K_n na początku tego roku mamy
$$d = \frac{K_{n+1} - K_n}{K_{n+1}} = 1 - \nu.$$
Zatem, roczna stopa dyskontowa przy kapitalizacji rocznej ze stopą roczną r wynosi
$$d = 1 - \frac{1}{1+r} = \frac{r}{1+r},$$
zaś przy kapitalizacji ciągłej i stopie nominalnej r_c
$$d_c = 1 - e^{-r_c}.$$
Przy użyciu czynnika dyskontującego kapitał początkowy K_0, który wygeneruje po n latach kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem
$$K_0 = \nu^n K_n,$$
a przy użyciu rocznej stopy dyskontowej d :
$$K_0 = (1-d)^n K_n.$$

4.8. Oprocentowanie a inflacja.

Mianem ***inflacji*** określamy zjawisko spadku siły nabywczej kapitału, czyli ilości dóbr (towarów i usług), które możemy kupić za ten kapitał. Miarą inflacji w ustalonym okresie czasu jest ***stopa procentowa inflacji***, która wyraża procentowy wzrost cen towarów i usług w tym okresie. Ponieważ inflacyjny wzrost cen w danym okresie nakłada się na wzrost cen w poprzednim okresie, więc model opisujący inflacyjne zmiany cen jest modelem oprocentowania składanego ze zmiennymi w czasie stopami wyrażonego równaniem (4.11).

Przypuśćmy, że badamy inflacyjne zmiany cen w m okresach.
Niech:
$i_{inf}^{(j)}$ – okresowa stopa inflacji w okresie $j = 1, 2, ..., m$,
f_{inf} – $m-$okresowa stopa inflacji (równa procentowi o jaki wzrosną ceny łącznie po upływie m okresów),
$\bar{\imath}_{inf}$ – przeciętna w czasie m okresów stopa inflacji.

Zgodnie ze wzorami (4.16)-(4.17) m–okresowy czynnik inflacji $1 + i_{inf}$ wynosi

$$\boxed{1 + f_{inf} = \prod_{j=1}^{m} \left(1 + i_{inf}^{(j)}\right),}$$

czyli jest iloczynem czynników inflacji z kolejnych okresów. Zaś zgodnie z (4.15) przeciętna w czasie m podokresów stopa inflacji wynosi

$$\boxed{\bar{\imath}_{inf} = \sqrt[m]{1 + f_{inf}} - 1 = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} \left(1 + i_{inf}^{(j)}\right)} - 1.} \tag{4.18}$$

Biorąc pod uwagę wpływ inflacji na zmianę wartości kapitału początkowego K_0 po upływie pewnego ustalonego okresu t należy rozróżnić jego wzrost „nominalny" – np. związany z faktem, że kapitał był zdeponowany w banku, z jego wzrostem „realnym" związanym z siłą nabywczą tego kapitału. Załóżmy, że dana jest pewna stopa procentowa i_{nom} zwana w tym kontekście ***stopą nominalną.*** Według tej stopy, po upływie czasu t kapitał końcowy będzie wynosić

$$K_{nom} = K_0 \left(1 + i_{nom}\right). \tag{4.19}$$

Jednak wartość K_{real} tego kapitału związana z jego siłą nabywczą będzie tyle razy mniejsza ile razy wzrosły ceny w tym okresie. Jeśli więc i_{inf} oznacza stopę inflacji w tym okresie, to

$$K_{real} = \frac{K_{nom}}{1 + i_{inf}} = K_0 \frac{1 + i_{nom}}{1 + i_{inf}}. \tag{4.20}$$

Powyższe rozważania pozwalają na formalne wprowadzenie pojęć wartość kapitału nominalnego i realnego.

Wartością nominalną kapitału na koniec okresu długości t przy danej stopie i_{nom} nazywamy wartość określoną równością (4.19), tzn.

$$\boxed{K_{nom} := K_0 \left(1 + i_{nom}\right).}$$

Wartością realną kapitału na koniec okresu długości t przy stopie inflacji i_{inf} nazywamy wartość określoną równością (4.20) t.j.

$$\boxed{K_{real} := \frac{K_{nom}}{1+i_{inf}}.}$$

Stopą realną nazywamy liczbę

$$i_{real} := \frac{1+i_{nom}}{1+i_{inf}} - 1. \tag{4.21}$$

Wobec (4.19)-(4.20)

$$K_{real} = \frac{K_{nom}}{1+i_{inf}} = \frac{K_0\,(1+i_{nom})}{1+i_{inf}} = K_0\,(1+i_{real})\,,$$

czyli stopa i_{real} jest w istocie stopą procentową informującą o ile procent zmienia się wartość realna kapitału w badanym okresie czasu t.

Bezpośrednio z (4.21) wynika, że

$$\boxed{1+i_{nom} = (1+i_{real})\,(1+i_{inf})\,.} \tag{4.22}$$

Powyższa zależność nosi nazwę ***wzoru Fishera***. Możemy więc powiedzieć, że czynnik nominalnego oprocentowania kapitału jest iloczynem czynnika realnego wzrostu kapitału i czynnika inflacji. Ze wzoru Fishera wynika, że

$$\boxed{i_{real} = \frac{i_{nom}-i_{inf}}{1+i_{inf}}} \tag{4.23}$$

oraz

$$\boxed{i_{inf} = \frac{i_{nom}-i_{real}}{1+i_{real}}.}$$

Mamy

Własność 4.3.

1. *Stopy nominalna jest równa stopie realnej jedynie przy zerowej inflacji.*
2. *Jeśli* $i_{inf} > 0$, *to* $i_{real} < i_{nom} - i_{inf}$.
3. *Jeśli* $i_{inf} < 0$, *to* $i_{real} > i_{nom} - i_{inf} = i_{nom} + |i_{inf}|$
4. $i_{real} > 0 \Leftrightarrow i_{inf} < i_{nom}$

W okresach, w których stopa inflacji jest ujemna mówimy o ***deflacji***, której miarą jest stopa $|i_{inf}|$. Wtedy własność 4.3.3 mówi, że przy deflacji (o stopie mniejszej niż 1) wartość realna jest większa niż stopa nominalna nawet powiększona o stopę deflacji.

Przykład 4.3. *Tegoroczne środki przyznane uczelni na prace naukowo-badawcze są wyższe do ubiegłorocznych o* 22%. *Jaki jest realny wzrost tego funduszy, jeśli stopa inflacji wynosi 13%?*

Przykład pokazuje sens wzoru Fishera. Mam oczywiście, że

$$1 + r_{real} = \frac{1+r_{nom}}{1+r_{inf}} = \frac{1.22}{1.13} \approx 1.0796,$$

skąd

$$r_{real} = 7.96\%$$

Przykład 4.4. *Przewidując stopę inflacji* 5% *rocznie ustalono, że spłata pożyczki* 6500 *zł wyniesie po dwóch latach 8000 zł. Obliczymy realną roczną stopę oprocentowania pożyczki, jeśli*

(a) *poziom inflacji będzie zgodny z przewidywaniami,*

(b) *w pierwszym roku inflacja wyniesie* 6%, *a w drugim* 9%.

(Ad a) *Obliczymy najpierw roczną stopę nominalną r_{nom} oprocentowania pożyczki. Ponieważ*

$$8000 = 6500\,(1 + r_{nom})^2\,,$$

więc

$$r_{nom} = \sqrt{\frac{8000}{6500}} - 1 \approx 10.94\%.$$

Korzystając ze wzoru Fishera albo bezpośrednio z (4.23)

$$r_{real} = \frac{r_{nom} - r_{inf}}{1 + r_{inf}} = \frac{0.1094 - 0.05}{1 + 0.05} \approx 5.66\%.$$

(Ad b) *Stopa inflacji zmieniała się w ciągu całego okresu dwóch lat. Możemy jednak obliczyć stopę przeciętną, która zgodnie z określeniem, wygenerowałaby w okresie dwóch lat identyczny spadek wartości nominalnej kapitału. Zgodnie ze wzorem (4.18)*

$$\bar{r}_{inf} = \sqrt{(1 + 0.06)\,(1 + 0.09)} - 1 \approx 7.49\%.$$

$$\frac{r_{nom} - r_{inf}}{1 + r_{inf}} = \frac{0.1094 - 0.0749}{1 + 0.0749} \approx 3.21\%.$$

Powróćmy jeszcze do zależności między wartością realną kapitału i jego wartością nominalną. Wobec określenia wartości realnej

$$K_{real} = \frac{K_{nom}}{1 + i_{inf}} = K_{nom}\left(\frac{1 + i_{inf} - i_{inf}}{1 + i_{inf}}\right) = K_{nom}\left(1 - \frac{i_{inf}}{1 + i_{inf}}\right).$$

Obliczenie kapitału realnego na podstawie kapitału realnego przypomina więc operację dyskontowania ze stopą

$$d_{inf} := \frac{i_{inf}}{1 + i_{inf}}.$$

Rozdział 5

Wartość kapitału w czasie

5.1. Model wartości kapitału w czasie.

Jest rzeczą jasną, że wartość kapitału jest wielkością zmienną w czasie. Ta sama kwota pieniędzy posiadana 10 lat temu dziś stanowi zupełnie inną wartość. W matematyce finansowej za aktualną wartość kapitału rozumie się jego wartość w chwili obecnej – *present value* (PV). Dla oznaczenia przyszłej wartości kapitału używa się skrótu FV – *future value*. Oczywiście dla obliczenia przyszłej wartości kapitału na podstawie wartości obecnej stosuje się model oprocentowania, natomiast dla obliczenia wartości obecnej na podstawie wartości przyszłej – model dyskontowania.

Rozważmy następujący

Przykład 5.1. *N początku roku pan Kowalski ma zdeponowane na lokacie rocznej oprocentowanej 6% w skali roku 100000 zł. Na koniec roku pan Kowalski otrzyma 40000 zł jako zapłatę za pewną pracę zleconą. Zauważmy, że*

1. *Pan Kowalski nie może powiedzieć, że na koniec roku będzie posiadaczem kwoty 140000 zł albowiem będzie posiadaczem kwoty 40000 zł oraz 100000 zł powiększonej o odsetki:*
$$100000 \cdot 1.06 + 40000 = 1460000.$$
2. *W chwili obecnej pan Kowalski nie może (na ogół) uważać się za posiadacza kwoty 140000 zł. Gdyby chciał za tę kwotę kupić samochód, to nawet likwidując lokatę musiałby wziąć kredyt na pozostałą kwotę. W sytuacji, gdyby otrzymał kredyt do końca roku musiałby go spłacić wraz z odsetkami, czyli w kwocie przekraczającej 40000zł.*

Powyższy przykład pokazuje, że aby analizować wartość kapitału potrzebne jest użycie jakiegoś mechanizmu rachunkowego przeliczającego jego wartość na wskazaną chwilę czasu. Oczywiście takim mechanizmem jest oprocentowania i dyskontowanie. Na ogół do przeliczania wartości kapitału w czasie używa się modelu związanego z procentem (dyskontem) składanym.

Niech $\mathbb{R} \ni t \mapsto K(t)$ będzie funkcją modelującą wartość kapitału w czasie (t oznacza czas mierzony w latach). Przypuśćmy, że znana jest jego wartość $K(t_0)$ w chwili t_0. Zastosujemy model wykładniczy oprocentowania czyli model kapitalizacji ciągłej. Załóżmy, że kapitał podlega oprocentowaniu składanemu ze stopą efektywną $r > 0$. Wobec (4.8) mamy dla $t \geq t_0$

$$K(t) = K(t_0)(1+r)^{t-t_0},$$

gdyż kapitał podlega oprocentowaniu. Aby obliczyć wartość kapitału dla $t < t_0$ musimy zauważyć, że zgodnie z modelem wykładniczym

$$K(t_0) = K(t)(1+r)^{t_0-t},$$

skąd

$$K(t) = K(t_0)(1+r)^{t-t_0}.$$

Zatem, modelem zmiany wartości kapitału w czasie jest funkcja

$$\boxed{K(t) = K(t_0)(1+r)^{t-t_0}, \qquad t \in \mathbb{R}.} \tag{5.1}$$

Oczywiście w przypadku, gdy kapitał podlega oprocentowaniu składanemu z kapitalizacją okresową powyższy funkcja uciągla dyskretne zmiany wartości kapitału. Wtedy wartości argumentu t powinny być dyskretne, związane z długością okresu kapitalizacji (pamiętajmy, że w każdym wypadku t wyraża czas mierzony w latach). Za pomocą rocznej stopy nominalnej r_c (spełniającej warunek $(1 + r = e^{r_c})$ model (5.1) może być wyrażony jako

$$\boxed{K(t) = K(t_0)\, e^{r_c(t-t_0)}.}$$

Zwróćmy też uwagę, że we wzorze (5.1) wybór chwili t_0 jest arbitralny – t_0 można zastąpić dowolnie inną chwilą t_1. Wtedy $K(t_1) = K(t_0)(1+r)^{t_1-t_0}$ oraz

$$K(t) = K(t_0)(1+r)^{t-t_0+t_1-t_1} = K(t_0)(1+r)^{t_1-t_0}(1+r)^{t-t_1} = K(t_1)(1+r)^{t-t_1}.$$

Kolejną istotną cechą modelu (5.1) jest jego addytywność. To znaczy, jeśli kapitał K podlegający modelowi (5.1) jest sumą kapitałów $K_1, \ldots K_m$, tzn.

$$K(t) = \sum_{j=1}^{m} K_j(t),$$

to każdy z kapitałów K_j zmienia swą wartość według tego samego modelu tzn.

$$K(t) = K(t_0)(1+r)^{t-t_0} = (1+r)^{t-t_0} \sum_{j=1}^{m} K_j(t_0) = \sum_{j=1}^{m} K_j(t_0)(1+r)^{t-t_0}.$$

Przykład 5.2. *Przypuśćmy, że koszt produkcji towaru A wytwarzanego przez firmę B przypadający na jednostkę czasu w chwili t wynosi $c(t)$ (jest to tzw. strumień kosztów produkcji wyrażony w jednostkach monetarnych dzielonych przez czas; można tę wielkość utożsamiać z prędkością zmiany kosztów produkcji). Przypuśćmy, że nie uwzględniamy zmiany wartości pieniądza w czasie. W tej sytuacji dla małego przyrostu czasu Δt o chwili $\bar{t}$ do chwili $\bar{t} + \Delta t$ można przyjąć, że koszt produkcji nie zmienia się w tym przedziale czasowym i w konsekwencji wynosi $c(\bar{t})\,\Delta t$. Postępując jak przy konstrukcji całki w sensie Riemanna dostajemy, że całkowity koszt produkcji w czasie od $t_0 = 0$ do chwili $t = T$ wynosi*

$$\int_0^T c(t)\, dt.$$

Taki sposób obliczenia kosztów całkowitych nie uwzględnia realnej zmiany wartości pieniądza. Należy najpierw zaktualizować poszczególne wartości kosztu na jeden wspólny moment i dopiero później dokonać obliczenia kosztu całkowitego. Przypuśćmy, że dokonamy aktualizacji funkcji kosztu na chwilę końcową $t = T$. Wtedy funkcja c będzie odzwierciedlała realny koszt produkcji na chwilę $t = T$, a dla chwil $t < T$ pieniądze wydawane na pokrycie kosztów będą miały w chwili T na ogół realną wartość większą niż ich ówczesna wartość nominalna. Zakładając zmianę wartości kapitału zgodną z modelem oprocentowania ze stopą efektywną $r > 0$ realny koszt produkcji na jednostkę czasu będzie postaci

$$c(t)(1+r)^{T-t}.$$

Całkowity koszt wynosić więc będzie

$$C(T) = \int_0^T c(t)(1+r)^{T-t}\,dt.$$

Odwrotnie, jeśli szacujemy całkowity koszt produkcji dla chwili $t = 0$, to kwota $c(t)$ wydawana w chwilach bliskich T będzie miała mniejszą wartość realną od nominalnej, stąd realny koszt produkcji na jednostkę czasu będzie postaci

$$c(t)(1+r)^{-t},$$

a całkowity koszt

$$C(0) = \int_0^T c(t)(1+r)^{-t}\,dt.$$

Zwróćmy uwagę, że możemy również znając całkowity zaktualizowany na chwilę t_0 wyrazić, korzystając z modelu wykładniczego przeliczyć go na dowolną chwilę τ :

$$C(\tau) = C(t_0)(1+r)^{\tau-t_0}.$$

Na przykład znając koszt $C(T) = \int_0^T c(t)(1+r)^{T-t}\,dt$ mamy

$$C(0) = C(T)(1+r)^{-T} = (1+r)^{-T}\int_0^T c(t)(1+r)^{T-t}\,dt = \int_0^T c(t)(1+r)^{-t}\,dt.$$

W obu przypadkach dostajemy identyczny efekt końcowy.

5.2. Zasada równoważności kapitałów.

Zasada równoważności kapitałów jest jedną z najważniejszych zasad matematyki finansowej. Pozwala ona zbadać, czy dwa modele zmienności kapitału w czasie opisują zmiany tego samego kapitału. Punktem wyjścia do naszych rozważań jest poniższa

Zasada równoważności kapitałów w momencie t. *Kapitały K_1 i K_2 są równoważne w chwili t, jeśli ich wartości zaktualizowane na tę chwilę są równe.*

Wyprowadzimy teraz formalne warunki równoważności kapitałów. Zakładamy cały czas, że wartość kapitału w czasie jest zgodna z modelem wykładniczym (5.1) z ustaloną roczną stopą efektywną r. Niech

$$K_1(t) = K_1(t_1)(1+r)^{t-t_1} \tag{5.2}$$

oraz

$$K_2(t) = K_2(t_2)(1+r)^{t-t_2}, \tag{5.3}$$

gdzie $K_1(t_1), K_2(t_2) > 0$. Zgodnie z powyższą zasadą kapitały te będą równoważne w chwili t, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$K_1(t_1)(1+r)^{t-t_1} = K_2(t_2)(1+r)^{t-t_2},$$

skąd dzieląc obie strony przez $(1+t)^{t-t_2}$

$$\boxed{K_1(t_1)(1+r)^{-t_1} = K_2(t_2)(1+r)^{-t_2}.} \tag{5.4}$$

Jeśli r_c oznacza roczną stopę nominalną oprocentowania ciągłego równoważną stopie r, to warunek równoważności ma postać

$$\boxed{K_1(t_1)e^{-r_c t_1} = K_2(t_2)e^{-r_c t_2}.} \tag{5.5}$$

Widać, że w obu wzorach (5.4) i (5.5) nie występuje chwila t, stąd mamy

Własność 5.1. *Kapitały K_1 i K_2 opisane modelami (5.2) i (5.3) odpowiednio, są równoważne w chwili t wtedy i tylko wtedy, gdy są równoważne w dowolnej chwili t'.*

Wobec powyższej własności możemy mówić o równoważności kapitałów niezależnie od czasu, czyli prowadzić nasze dalsze rozważania w oparciu o zasadę równoważności sformułowaną następująco:

Zasada równoważności kapitałów. *Kapitały K_1 i K_2, opisane modelem wykładniczym, są równoważne jeśli są równoważne w dowolnej chwili t.*

Ze wzoru (5.4) wynika też natychmiast

Wniosek 5.1. *Dwa kapitały K_1 i K_2 opisane modelami (5.2) i (5.3) odpowiednio, są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\boxed{\tfrac{K_1(t_1)}{K_2(t_2)} = (1+r)^{t_2-t_1}.} \tag{5.6}$$

Ponadto, relacja równoważności kapitałów jest relacją przechodnią.

Wszystkie powyższe rozważania zostały przeprowadzone przy danej z góry stopie procentowej r. Zauważmy, że jeżeli kapitały K_1 i K_2 są równoważne przy stopie r, to dla dowolnej innej stopy r' równoważność kapitałów oznaczałaby na mocy poprzedniej własności, że

$$(1+r)^{t_2-t_1} = (1+r')^{t_2-t_1},$$

skąd

$$t_2 = t_1.$$

Czyli równoważność przy nowej stopie byłaby możliwa, gdyby zmiana stopy nastąpiła dla obu kapitałów w tym samym momencie, w pozostałych przypadkach kapitały nie będą równoważne.

Rozważając model wykładniczy kapitału w czasie można również postawić następujący problem. Załóżmy, że mamy dane dwa kapitały K_1 i K_2, których wartości $K_1(t_1)$ i $K_2(t_2)$

w chwilach t_1 i t_2 są dane. Przy jakiej stopie r kapitały te są równoważne? Ze wzoru (5.6) dostajemy natychmiast, że stopa ta spełnia warunek

$$\boxed{r = \left(\frac{K_1(t_1)}{K_2(t_2)}\right)^{\frac{1}{t_2-t_1}} - 1.}$$

Na zakończenie rozważmy jeszcze przypadek, w którym dane są dwa ciągi kapitałów M_j, $j = 1, 2, ..., m$ oraz N_j, $j = 1, 2, ..., n$. Powiemy, że powyższe ciągi są ***równoważnymi ciągami kapitałów,*** jeśli kapitały K_1 oraz K_2 postaci

$$K_1(t) = \sum_{j=1}^{m} M_j(t)$$

oraz

$$K_2(t) = \sum_{j=1}^{n} N_j(t)$$

są równoważne.

Część II

Modele matematyczne.

Rozdział 6

Pochodna funkcji w ekonomii

Przyjmijmy oznaczenie $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$.

6.1. Funkcja krańcowa

Niech funkcja $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ opisuje koszt produkcji pewnego towaru w zależności od liczby wyprodukowanych jednostek. Dla $x \in \mathbb{R}_+$ wielkość $C(x)$ oznacza więc koszt wyprodukowania x jednostek towaru. Funkcję C będziemy nazywać ***funkcją kosztu całkowitego.*** Dalej, dla $x > 0$ wielkość

$$c(x) := \frac{C(x)}{x}$$

oznacza koszt jednostkowy wyprodukowania x jednostek towaru, tzn. koszt, jaki przypada na produkcję jednej jednostki towaru przy poziomie produkcji x jednostek. Funkcję $c : (0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ nazywamy ***funkcją kosztu przeciętnego***.

Niech $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $\Delta x > 0$ wtedy iloraz różnicowy

$$\frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$$

oznacza przeciętny koszt wyprodukowania dodatkowych Δx jednostek towaru przy poziomie produkcji x_0. Granicę

$$C'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x},$$

o ile istnieje, nazywamy ***kosztem krańcowym (marginalnym)*** produkcji przy poziomie produkcji x_0. Zakładając różniczkowalność funkcji C funkcję C' nazywamy ***funkcją kosztu krańcowego***. Mamy też, że dla małych Δx

$$C(x_0 + \Delta x) - C(x_0) \approx C'(x_0)\, \Delta x,$$

co, uznając $\Delta x = 1$ za wielkość małą, daje przybliżoną informację, że jeśli zwiększymy produkcję z poziomu x_0 jednostek o jedną jednostkę, to koszt produkcji zwiększy się o $C'(x_0)$.

Wielkość produkcji x_0 dla której koszt przeciętny $c(x)$ wyprodukowania jednostki danego dobra przez przedsiębiorstwo osiąga wartość najmniejszą nazywamy ***optimum technologicznym.***

Przykład 6.1. *Koszt wytworzenia x jednostek produkcji dla $x \geq 0$ określony jest funkcją $C(x) = x^3 - 60x^2 + 1528x$. Funkcja kosztów krańcowych, a więc pochodna funkcji C ma postać*

$$C'(x) = 3x^2 - 120x + 1528.$$

Dla produkcji wynoszącej $x = 5$, koszt wyprodukowania dodatkowej jednostki wyniesie

$$C(6) - C(5) = 7224 - 6265 = 959,$$

a koszt krańcowy ma wartość $C'(5) = 1003$ jednostki, zatem skorzystanie z interpretacji kosztu krańcowego daję mocno przybliżony wynik.

Jeżeli $x = 100$, to koszt wyprodukowania dodatkowej jednostki wyniesie

$$C(101) - C(100) = 572\,569 - 552\,800 = 19\,769,$$

a koszt krańcowy ma wartość $C'(100) = 19\,528$ jednostek. Widzimy więc, że nawet stosując przybliżoną za pomocą funkcji kosztu krańcowego wartość wyprodukowania dodatkowej jednostki towaru możemy wyciągnąć wniosek, że zwiększanie produkcji opłaca się bardziej przy produkcji na poziomie $x = 5$ jednostek niż na poziomie $x = 100$ jednostek.

Następnie koszt przeciętny określa funkcja postaci

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = x^2 - 60x + 1528.$$

Mamy więc, że minimalna wartość funkcji c jest osiągnięta dla $x = 30$. Zatem wielkość produkcji $x = 30$ stanowi optimum technologiczne. Zauważmy też, że

$$c(30) = 628 = C'(30)$$

Własność 6.1. *Niech x_0 będzie optimum technologicznym, wówczas*

$$c(x_0) = C'(x_0).$$

Dowód. Niech x_0 będzie wielkością produkcji. Skoro x_0 jest optimum technologicznym, to

$$c'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{C(x)}{x}\right)'_{x=x_0} = 0,$$

stąd

$$\frac{C'(x_0)x_0 - C(x_0)}{x_0^2} = 0,$$

czyli

$$\frac{C(x_0)}{x_0} = C'(x_0),$$

zatem

$$c(x_0) = C'(x_0).$$

Ostatnia równość oznacza, że krzywa kosztów krańcowych przecina się z krzywą kosztów przeciętnych w punkcie oznaczającym jej minimum. ■

Załóżmy, że pewien zakład prowadzi sprzedaż towaru. Niech $x \geq 0$ oznacza ilość jednostek towaru sprzedawanych przez ten zakład. oznaczmy przez $U(x)$ ***utarg całkowity***, czyli przychód ze sprzedaży x jednostek towaru. Funkcja $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ jest, więc ***funkcją utargu całkowitego*** czyli funkcję opisującą kwotę, jaką przedsiębiorstwo otrzyma za sprzedaż x jednostek towaru. Zakładając, że U jest funkcją różniczkowalną szybkość zmian utargu zakładu przy sprzedaży x jednostek wynosi:

$$U'(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

Tak jak w przypadku kosztu U' nazywana jest ***funkcją utargu krańcowego***. Zatem utarg krańcowy U' jest równy wzrostowi sprzedaży jeśli zwiększymy ją o dodatkową jednostkę towaru.

Załóżmy, że pewien zakład prowadzi produkcję i sprzedaż produktu. Niech $Z(x)$ oznacza ***zysk całkowity*** przedsiębiorstwa przy produkcji i sprzedaży x jednostek towaru. Funkcję $Z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ nazywamy ***funkcją zysku całkowitego***. Oczywiście

$$Z(x) = U(x) - C(x) \quad dla \quad x \geq 0,$$

gdzie $U(x)$ oznacza utarg, a $C(x)$ koszt całkowity produkcji x jednostek danego produktu. Stąd dostajemy natychmiast

Własność 6.2. *Jeśli x_0 jest wielkością produkcji dla której przedsiębiorstwo osiąga zysk maksymalny, to $C'(x_0) = U'(x_0)$, czyli koszt krańcowy dla produkcji o wielkości x_0 jest równy utargowi krańcowemu dla x_0.*

Przykład 6.2. *Cena zbytu wyrobu jest równa $p(x) = 40 - 0.03x$, gdzie x oznacza liczbę jednostek wyrobu. Koszt całkowity x jednostek wyrobu w pewnym zakładzie dany jest wzorem $C(x) = 0.01x^2 + 20x + 225$. Dla jakiej wielkości produkcji zysk na jednostkę wyrobu jest największy?*

Mamy

$$C'(x) = 0.02x + 20,$$
$$Z(x) = (xp(x) - C(x)) = 20x - 0.04x^2 - 225,$$
$$Z'(x) = -0.08x + 20.$$

Niech x_0 będzie wielkością produkcji odpowiadającą zyskowi maksymalnemu, wtedy

$$U'(x_0) = C'(x_0),$$

skąd $x_0 = 250$.

6.2. Elastyczność funkcji

Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $((a, b) \subset \mathbb{R}_+)$, $x_0 \in (a, b)$ oraz niech Δx będzie takim przyrostem, że $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$.

Przyrostem względnym wartości funkcji f dla argumentu x_0 i przyrostu Δx nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta y}{y} := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)},$$

o ile $f(x_0) \neq 0$. Liczbę

$$\frac{\Delta x}{x_0}$$

nazywamy ***przyrostem względnym argumentu*** dla argumentu x_0.

Elastycznością przeciętną funkcji f w przedziale $\langle x_0, x_0+\Delta x\rangle$ nazywamy stosunek względnego przyrostu funkcji do względnego przyrostu argumentu

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)} \cdot \frac{x_0}{\Delta x} \tag{6.1}$$

i oznaczamy symbolem $E_{x_0,\Delta x}f$.

Elastycznością funkcji f ***w punkcie*** x_0 nazywamy granicę (o ile istnieje)

$$\lim_{\Delta x \to 0} E_{x_0,\Delta x}f$$

i oznaczamy $E_{x_0}f$.

Uwaga 6.1. *Jeśli* $\Delta x = 0.01x_0 = 1\% \cdot x_0$, *to*

$$E_{x_0}f \approx E_{x_0,\Delta x}f = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)} \cdot 100\%.$$

Elastyczność $E_{x_0}f$ *jest więc (w przybliżeniu) miarą przeciętnego procentowego przyrostu wartości funkcji* f*, odpowiadającego przyrostowi wartości argumentu* x *o* 1%.

Mamy następującą

Własność 6.3. *Jeżeli* $f(x_0) \neq 0$*, to*

$$E_{x_0}f = f'(x_0)\frac{x_0}{f(x_0)}. \tag{6.2}$$

Dowód. Mamy, że

$$\lim_{\Delta x \to 0} E_{x_0,\Delta x}f = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} = f'(x_0)\frac{x_0}{f(x_0)}.$$

■

Własność 6.4. *Jeżeli argument* x *funkcji* f *wzrasta o* $p\%$ *od pewnej wartości początkowej* x_0*, to wartość funkcji zmienia się o* $q\%$*, gdzie*

$$q \approx pE_{x_0}f.$$

Dowód. Niech x_0 będzie wartością początkową. Przypuśćmy, że argument x wzrósł o $p\%$, co wywołało zmianę wartości funkcji o $q\%$ (licząc od $f(x_0)$), wtedy

$$f(x_0 + \frac{p}{100}x_0) - f(x_0) = \frac{q}{100}f(x_0). \tag{6.3}$$

Mamy, że

$$f\left(x_0+\Delta x\right) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right)\Delta x,$$

skąd

$$E_{x_0}f = \frac{x_0}{f(x_0)} f'(x_0) \approx \frac{x_0}{f(x_0)} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Przyjmując $\Delta x = \frac{p}{100} x_0$ otrzymujemy z (6.3), że

$$E_{x_0}f \approx \frac{x_0}{f(x_0)} \frac{\frac{q}{100} \cdot f(x_0)}{\frac{p}{100} x_0} = \frac{q}{p},$$

zatem

$$q \approx p E_{x_0} f.$$

■

Przykład 6.3. *Obliczymy elastyczność funkcji*

$$f(x) = \frac{2x}{x+8}, \quad x > 0$$

w punkcie $x_0 = 2$.

Ponieważ $f'(x) = \frac{16}{(x+8)^2}$, *zatem*

$$E_{x_0}f = \frac{1}{2}(x+8)\frac{16}{(x+8)^2} = \frac{8}{x+8}.$$

Dla $x_0 = 2$ *mamy więc, że* $E_2 f = 0.8$. *Oznacza to, że jeśli argument* $x_0 = 2$ *wzrośnie o* 1%, *to wartość funkcji* f *wzrośnie o około* 0.8%.

Porównamy ten wynik z wynikiem dokładnym:

$$f(x_0 + 0.01x_0) = f(2+0.02) = f(2.02) = \frac{2 \cdot 2.02}{2.02+8} = \frac{4.04}{10.02} = \frac{202}{501}$$

oraz

$$f(x_0) = f(2) = \frac{4}{10} = 0.4.$$

Skąd

$$\frac{f(x_0+0.01x_0)}{f(x_0)} \cdot 100\% = \frac{\frac{202}{501}}{0.4} \cdot 100\% = \frac{202}{501} \cdot \frac{10}{4} \cdot 100\% = \frac{505}{501} \cdot 100\% \approx 100.798\,403\,2,$$

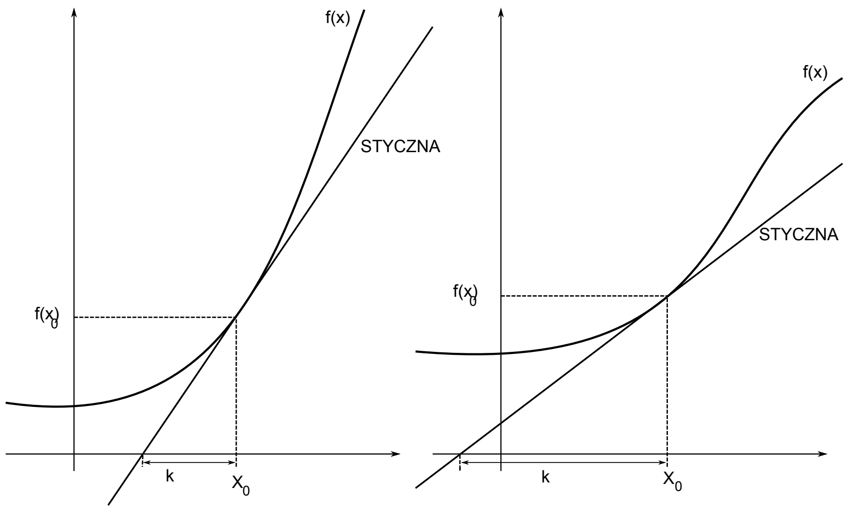
czyli wzrost nastąpił o 0.798 403 2%.

Widzimy więc, że stosując wzór na elastyczność funkcji w punkcie rozwiązanie jest znacznie krótsze.

Uwaga 6.2. *Własność 6.4 podaje przybliżony wzrost procentowy funkcji* f. *Zauważmy jednak, że wartość* $pE_{x_0}f$ *jest dokładnie równa procentowi o jaki wzrosła wartość funkcji przy wzroście argumentu o* p%, *jeśli funkcja jest liniowa. Wynika to bezpośrednio z faktu, że dla funkcji liniowej* f *zachodzi wzór*

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x.$$

Innymi słowy, dla funkcji liniowej elastyczność przeciętna i elastyczność są równe. Powyższy wniosek pozostaje prawdziwy, jeśli przyrost Δx *jest na tyle mały, że funkcja* f *na przedziale* $(x_0, x_0+\Delta x)$ *jest liniowa (lub może być tak traktowana).*



Rysunek 6.1 Interpretacja geometryczna elastyczności funkcji f w punkcie x_0.

6.2.1. Interpretacja geometryczna elastyczności funkcji f w punkcie x_0.

Zgodnie z geometryczną interpretacją pochodnej funkcji f w punkcie x_0 wartość $f'(x_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym stycznej poprowadzonej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Niech x_1 oznacza miejsce zerowe tej stycznej oraz niech $k := x_0 - x_1$. Wówczas $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{k}$. Stąd

$$E_{x_0} f(x_0) = \frac{x_0}{f(x_0)} f'(x_0) = \frac{x_0}{f(x_0)} \frac{f(x_0)}{k} = \frac{x_0}{k}.$$

Analizując funkcję przedstawioną na rysunku 6.1 z lewej strony widzimy, że elastyczność funkcji w punkcie x_0 jest większa od 1, czyli $E_{x_0} f(x_0) = \frac{x_0}{k} > 1$, gdyż $x_0 > k$, zaś funkcja z prawej strony ma elastyczność w punkcie x_0 mniejszą od 1, czyli $E_{x_0} f(x_0) = \frac{x_0}{k} < 1$, gdyż $x_0 < k$.

6.2.2. Elastyczność funkcji kosztów.

Niech $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ oznacza funkcję kosztu całkowitego ($C(x)$ oznacza koszt całkowity wytworzenia x jednostek produktu). Załóżmy, że C jest różniczkowalna. Wówczas zgodnie ze wzorem (6.2) elastyczność kosztu (przy założeniu, że $C(x) > 0$) wynosi

$$E_x C = \frac{x}{C(x)} C'(x).$$

Jeśli więc c oznacza funkcję kosztu przeciętnego, to

$$E_x C = \frac{C'(x)}{c(x)}.$$

Elastyczność kosztu całkowitego jest więc równa stosunkowi (ilorazowi) kosztu całkowitego do kosztu przeciętnego.

Dla kosztu przeciętnego c mamy

$$E_x c = \frac{x}{c(x)} c'(x). \tag{6.4}$$

Mamy

Własność 6.5. *Elastyczność kosztu całkowitego jest o jeden większa od elastyczności kosztu przeciętnego*

$$E_x c + 1 = E_x C.$$

Dowód.

$$E_x c = \frac{x}{c(x)} c'(x) = \frac{x}{\frac{C(x)}{x}} \cdot \left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{x^2}{C(x)} \cdot \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{x}{C(x)} C'(x) - 1 = E_x C - 1.$$

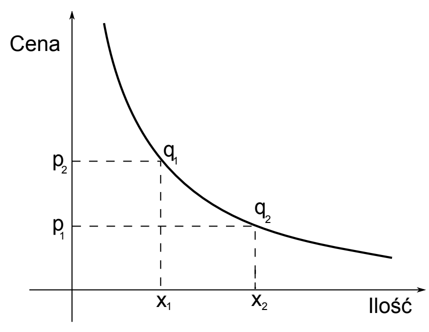
■

6.2.3. Elastyczność funkcji popytu.

Zajmiemy się teraz rozważaniem dotyczącym zmian popytu. W ekonomii ***popyt*** określa ilość dobra (usługi), jaką nabywcy są gotowi zakupić (nabyć) przy różnej wysokości ceny w danym czasie przy założeniu, że inne czynniki mające wpływ na popyt pozostają niezmienne.

Zmiana popytu zachodzi pod wpływem licznych czynników takich jak: wysokość ceny, dochód, liczba nabywców, zmiana cen innych dóbr, reklama i preferencje nabywców. Dokładniej omówimy dwa z tych czynników: zmianę wielkości cen dóbr i wysokości dochodu konsumenta.

Często aby zilustrować popyt rozważa się tak zwaną ***krzywą popytu.*** Jest to zależność między ilością danego towaru, jaki może być wchłonięty przez rynek, a czynnikiem kształtującym popyt np. ceną towaru na rynku. Naturalne jest, że jeśli cena danego dobra rośnie, to występuje spadek wielkości popytu i odwrotnie gdy cena maleje wówczas następuje zwiększenie wielkości popytu jest, to tak zwane ***prawo popytu***.



Rysunek 6.2 Krzywa popytu.

Cenowa elastyczność popytu

Załóżmy, że zmiana popytu jest wyrażona za pomocą funkcji ilości towaru q, jaki może zostać wchłonięty przez rynek a jego ceną jednostkową p. Wrażliwość zmian popytu na zmianę cen dóbr mierzy się przy pomocy elastyczności funkcji $q(p)$ zwanej ***cenową elastycznością popytu.*** Jej wartość (dla konkretnej wartości ceny) nazywa się ***współczynnikiem elastyczności cenowej popytu.***

Dokonując linearyzacji funkcji $q(p)$, czyli zakładając, że zmiana funkcji q ma, przynajmniej lokalnie charakter liniowy, mamy, że elastyczność cenowa popytu to stosunek względnej (procentowej) zmiany popytu do względnej (procentowej), (małej), zmiany ceny. Jeśli ustalimy argument p, to przy takim założeniu współczynnik elastyczności ϵ_c (definiowany jako wartość elastyczności w punkcie p) określa (w przybliżeniu – tak dobrym, jak założenie liniowości funkcji w otoczeniu punktu p jest realne), o ile procent zmieni (zmniejszy lub zwiększy) się popyt na dane dobro w przypadku gdy jego cena zmieni się (wzrośnie lub spadnie) o 1%.

Przykład 6.4. *Załóżmy, że p jest ceną towaru zaś q oznacza popyt na dany towar (ilość towaru, jaka może być wchłonięta przez rynek). Niech cena początkowa towaru wynosi $p_0 = 30$ jednostek pieniężnych, następne cena ta została zwiększona o $\Delta p = 6$ jednostki pieniężne. Względna zmiana ceny, więc wynosi*

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{6}{30} = 20\%$$

Następnie załóżmy, że cenie $p_0 = 30$ odpowiada popyt $q = 200$ jednostek towaru, a cenie zwiększonej o 6 jednostek od pozycji wyjściowej, czyli $p + \Delta p = 36$ odpowiada popyt $q + \Delta q = 190$ jednostek towaru, stąd mamy $\Delta q = -10$, zatem względna zmiana popytu wynosi

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{-10}{200} = -5\%.$$

Załóżmy, że popyt jest funkcją liniową (przynajmniej w otoczeniu p_0). Elastyczność cenowa popytu w naszym przypadku będzie równa

$$\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta p}{p} = -\frac{1}{4}.$$

Widzimy więc, że w naszym przypadku wzrost (bądź spadek) ceny p o 1% spowoduje zmniejszenie (bądź zwiększenie) popytu o 0.25%.

Bezwzględny współczynnik cenowej elastyczności popytu $|\epsilon_c|$ może przyjmować wartości z przedziału $(0;\infty)$ dlatego przyjęto konwencje według której określamy czy funkcja popytu jest elastyczna w pewnym punkcie. A zatem gdy:

- $|\epsilon_c| = 0$ oznacza, że zmiany ceny jakie wystąpiły nie spowodowały zmiany popytu. Popyt jest wówczas ***doskonale nieelastyczny (sztywny)***.
- $|\epsilon_c| < 1$ wówczas względna zmiana ceny jest większa niż względna zmiana popytu, czyli jeśli wzrostowi ceny o 1% odpowiada zmiana wartości popytu mniejsza niż 1%. W tym przypadku mówimy, że popyt jest ***nieelastyczny***.

- $|\epsilon_c| = 1$ wówczas względna zmiana ceny jest równa względnej zmianie popytu, czyli jeśli cena wzrośnie np. o 1% to popyt zmieni samą wartość o 1% taką elastyczność nazywamy ***elastycznością wzorcową*** a popyt o tej własności popytem neutralnym .
- $|\epsilon_c| > 1$ wówczas względna zmiana ceny jest mniejsza od względnej zmiany popytu, czyli wzrost ceny o 1% spowoduje zmianę wielkości popytu o wartość większa od wzrostu ceny - większą niż 1%. Mówimy więc, że popyt jest ***elastyczny*** (silnie elastyczny).
- $|\epsilon_c| \to \infty$ wówczas mówimy, że popyt jest ***doskonale elastyczny***.

W przypadku gdy $\epsilon_c < 0$ wówczas jest to tzw. paradoks cenowy, czyli wzrost ceny powoduje wzrost wielkości popytu, a spadek ceny powoduje spadek wielkości popytu.

Wracając do przykładu 6.4 otrzymaliśmy $\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta p}{p} = -\frac{1}{4}$, a więc zmiana ceny jaka wystąpiła jest większa od zmiany wartości popytu, czyli $|\epsilon_c| < 1$, więc popyt jest nieelastyczny.

Znajomość elastyczności cenowej popytu ma duże znaczenie ekonomiczne dla przedsiębiorcy ponieważ pozwala przewidzieć reakcję jaka wystąpi na rynku w przypadku zmian cen towarów, czyli w jakim stopniu zmiany cen wpłyną na popyt.

Przykład 6.5. *Znając wartość elastyczności cenowej popytu wiemy jak powinniśmy zmienić wysokość opłat za przejazd autobusem, aby nastąpił wzrost przychodów MPK za korzystanie z transportu publicznego. W przypadku gdy popyt na przejazdy jest elastyczny w stosunku do ceny, wówczas podwyżka opłat za bilety zmniejszy przychody MPK. Obniżając wysokość opłaty za przejazdy, spowoduje zwiększenie liczby chętnych korzystających z usług transportu autobusowego a przy tym podniesie wpływy MPK. Gdyby jednak popyt na przejazdy autobusem był nieelastyczny, należałoby wprowadzić podwyżkę cen biletów.*

Dochodowa elastyczność popytu

Kolejnym ważnym czynnikiem wpływającym na zmianę popytu jest wielkość dochodu konsumenta. Rozważamy więc zależność $w(d)$ ilości towaru w, jaki może wchłonąć rynek w zależności od dochodu konsumenta d. Wówczas możemy mówić o ***dochodowej elastyczności popytu.*** Rozumując jak poprzednio wprowadzamy (dla ustalonego dochodu d przy założeniu lokalnej liniowości funkcji w) miernik służący do oceny wpływu zmiany dochodu konsumenta na popyt, czyli stosunek względnej (procentowej) zmiany popytu do względnej (procentowej) zmiany dochodu

$$\epsilon_d = \frac{\Delta w}{w} : \frac{\Delta d}{d}. \tag{6.5}$$

Wtedy ϵ_d jest równy wartości elastyczności funkcji w w punkcie d i mierzy siłę reakcję popytu na zmianę dochodu konsumenta, czyli o ile procent wzrośnie popyt gdy dochód konsumenta wzrośnie o 1%. Podobnie jak dla elastyczności cenowej popytu wyróżniamy takie same rodzaje popytu: elastyczny, doskonale elastyczny, neutralny, nieelastyczny. Zwróćmy też uwagę, że występuje również zjawisko, które polega na spadku popytu na niektóre towary mimo wzrostu dochodu gdy $|\epsilon_d| < 0$ (np. zastąpienie dotychczas nabywanego produktu takim samym tylko w wyższej jakości).

Na podstawie przyjmowanych wartości wskaźnika dochodowej elastyczności popytu możemy dokonać rozróżnienia następujących dóbr:

- jeśli $\epsilon_d < 0$, to mamy do czynienia z popytem na tzw. ***dobra niższego rzędu (podrzędne)***. Są to dobra, na które popyt maleje ($\Delta w < 0$) wraz ze wzrostem dochodu konsumentów ($\Delta d > 0$) i odwrotnie, popyt na nie rośnie ($\Delta w > 0$), gdy dochody spadają ($\Delta d < 0$). Przykładem może tu być używana niskogatunkowa odzież.
- jeśli $\epsilon_d > 0$, to mamy do czynienia z popytem na tzw. ***dobra normalne (zwykłe)***. Są to dobra, na które popyt maleje ($\Delta w < 0$) wraz ze spadkiem dochodu konsumentów ($\Delta < 0$) oraz rośnie ($\Delta w > 0$), gdy dochody rosną ($\Delta d > 0$). Rozróżniamy dobra normalne dwojakiego rodzaju
  - ***dobra podstawowe (niezbędne)*** – charakteryzuje je współczynnik $\epsilon_d \in [0, 1]$, są to dobra pierwszej potrzeby np. chleb,
  - ***dobra luksusowe (dobra wyższego rzędu)***, dla których $\epsilon_d > 1$ – są to przeważnie towary wysokiej jakości.

Wykorzystanie dochodowej elastyczności popytu odgrywa istotną role w ekonomii, jest niezbędne do prognozowania zmian w strukturze popytu konsumpcyjnego, zachodzących pod wpływem wzrostu zamożności konsumentów jak i wzrostu gospodarczego (czyli w zwiększeniu rocznej produkcji dóbr i usług).

Informacje które dotyczące zmian ilości asortymentu produkcji wskazuje właśnie wartość wskaźnika elastyczności dochodowej popytu. W przypadku gdy następuje wzrost dochodów konsumentów wówczas producent w celu osiągnięcia najwyższych wpływów ze sprzedaży dóbr, może zwiększyć swoją produkcje dóbr normalnych lub też zastąpić dobra podrzędne innymi, posiadającymi wyższy standard lub takimi które będą atrakcyjniejsze dla klientów itp. Jeśli zaś dochód konsumentów maleje wówczas producent powinien obniżyć produkcje dóbr normalnych a zwiększyć produkcję dóbr podrzędnych, w szczególności tych wyższego rzędu (tzw. luksusowych).

6.3. Funkcje Törnquista

Szwedzki ekonomista Törnquist badał zależność pomiędzy wydatkami na zakup dóbr a wielkością dochodów konsumentów. Zaproponował on wymierny model krzywej popytu jako funkcji dochodu konsumentów. Rozróżnia się trzy rodzaje funkcji Törnquista:

- dla dóbr podstawowych:

$$T_1(x) = a \cdot \frac{x}{x+b}, \quad \text{gdzie} \quad x > 0 \quad \text{oraz} \quad a, b > 0;$$

- dla dóbr wyższego rzędu:

$$T_2(x) = a \cdot \frac{x-c}{x+b}, \quad \text{gdzie} \quad x \geq c \quad \text{oraz} \quad a, b, c > 0;$$

- dla dóbr luksusowych:

$$T_3(x) = a \cdot x \cdot \frac{x-c}{x+b}, \quad \text{gdzie} \quad x \geq c \quad \text{oraz} \quad a, b, c > 0$$

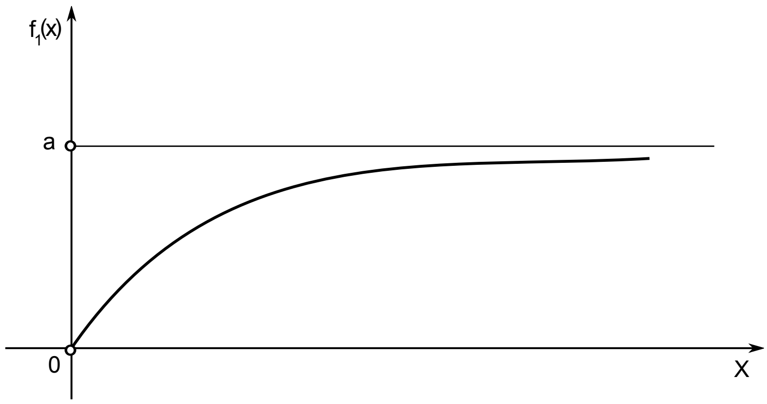
gdzie x oznacza dochód, zaś parametry a, b, c są pewnymi stałymi (przy czym parametry te dla każdej funkcji mogą być różne).

Przedstawimy teraz wykresy każdej z powyższych funkcji oraz omówmy ich interpretację ekonomiczną.

1. ***Funkcja Törnquista dla dóbr pierwszej potrzeby (podstawowych)***:

$$T_1(x) = a \cdot \frac{x}{x+b},$$

gdzie $x > 0$ oraz $a, b > 0$. Wykres funkcji T_1 jest postaci:



Rysunek 6.3 Wykres funkcji dla dóbr podstawowych.

Widzimy, że dobra pierwszej potrzeby nabywane są już przy najniższych dochodach. Wydatki konsumentów są rosnącą funkcją dochodów, czyli zwiększają się wraz ze wzrostem wielkości dochodów. Jednak wzrost ten mimo wzrostu dochodu jest coraz wolniejszy. Zauważmy, że

$$\lim_{x \to \infty} a \cdot \frac{x}{x+b} = a,$$

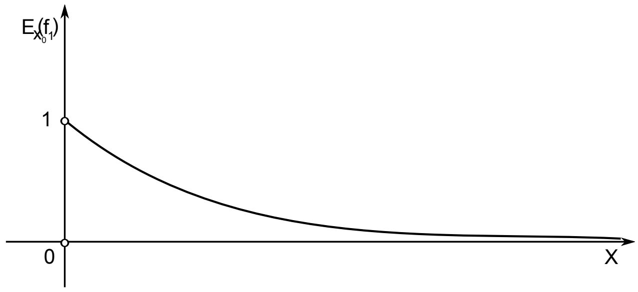
a więc krzywa T_1 ma asymptotę poziomą $y = a$, oznacza to że istnieje poziom nasycenia, czyli choćby dochód rósł nieograniczenie, to wydatki nie przekroczą tego poziomu.

Elastyczność powyższej funkcji wyraża się wzorem:

$$E_{x_0}T_1 = x_0 \cdot \frac{x_0+b}{ax_0} \cdot \frac{ab}{(x_0+b)^2} = \frac{b}{x_0+b}.$$

Obliczając granice $E_{x_0}T_1$ w nieskończoności mamy

$$\lim_{x \to \infty} \frac{b}{x_0+b} = 0. \tag{6.6}$$



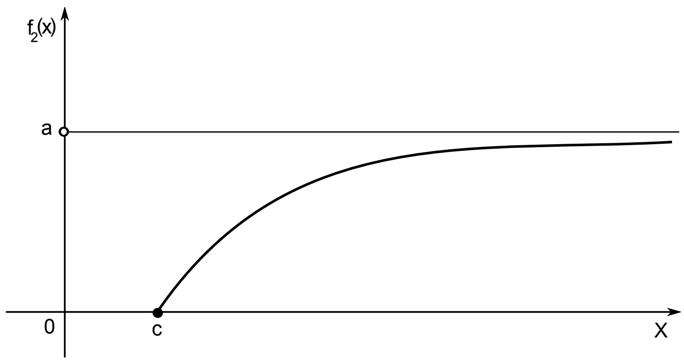
Rysunek 6.4 Wykres elastyczności funkcji dla dóbr podstawowych.

Z wykresów 6.4 oraz 6.6 widać, że gdy dochód konsumenta rośnie, to wartość elastyczności maleje do zera. Popyt dochodowy funkcji T_1 jest, więc nieelastyczny, ponieważ elastyczność jest zawsze mniejsza od 1, $E_{x_0}T_1 < 1$ dla każdego $x_0 > 0$ gdyż $b > 0$. Oznacza to, że wzrost dochodów o 1% powoduje wzrost wydatków (popytu) na określone dobro o wartość mniejszą niż 1%. Przy odpowiednio dużych dochodach wzrost konsumpcji na określone dobro zanika, czyli konsumenci posiadający wyższe dochody w znacznie większym stopniu mają zaspokajają dobra podstawowe niż konsumenci o niższych dochodach, u których reakcja na wzrost dochodów jest znacznie silniejsza.

2. ***Funkcja Törnquista dla dóbr wyższego rzędu***:

$$T_2(x) = a \cdot \frac{x-c}{x+b},$$

gdzie $x \geq c \quad$ oraz $\quad a, b, c > 0$. Wykres funkcji $f_2(x)$ jest postaci:



Rysunek 6.5 Wykres funkcji dla dóbr wyższego rzędu.

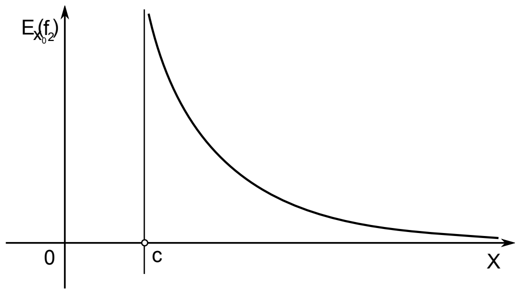
Wykres funkcji przedstawiony na rysunku 6.5 podobnie jak w poprzednim przypadku (rysunek 6.3) jest rosnącą funkcją dochodów względem wydatków na dobra wyższego rzędu. Funkcji jest określona dla $x > c$ co oznacza, że wydatki na dobra wyższego rzędu występują jeśli zostaną zaspokojone potrzeby na dobra podstawowe. Zauważmy, że

$$\lim_{x \to \infty} a \cdot \frac{x-c}{x+b} = a.$$

Zatem podobnie jak w przypadku funkcji T_1 przy coraz większych dochodach popyt zmienia się nieznacznie (stabilizuje się) w stosunku do wydatków, nie przekraczając poziomu nasycenia.

Elastyczność powyższej funkcji wyraża się wzorem:

$$E_{x_0}T_2 = x_0 \cdot \frac{b+c}{(x_0-c)(x_0+b)}, \quad x_0 > c.$$



Rysunek 6.6 Wykres elastyczności funkcji dla dóbr wyższego rzędu.

Elastyczność funkcji T_2 (rysunek (6.6)) jest funkcją malejącą. Mamy, też, że

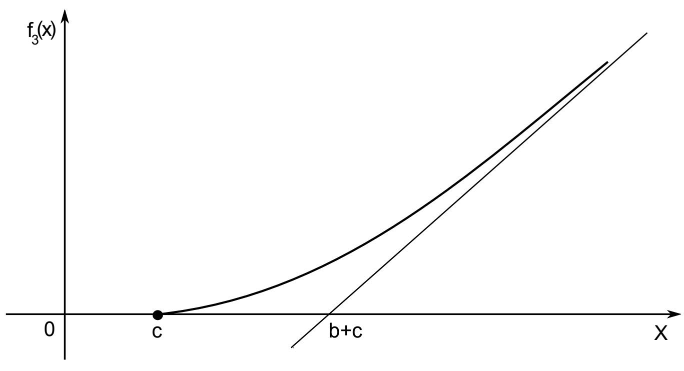
$$\lim_{x\to\infty} x_0 \cdot \frac{b+c}{(x_0-c)(x_0+b)} = 0,$$

a więc wraz ze wzrostem dochodów konsumenta elastyczność funkcji T_2 maleje do zera. Zatem procentowy wzrost dochodów powoduje coraz mniejszy procentowy wzrost wydatków (popytu) na dane dobro wyższego rzędu. Możemy też zauważyć, że przy dość dużych dochodach wzrost konsumpcji na dane dobro zanika.

3. ***Funkcja Törnquista dla dóbr luksusowych***:

$$T_3(x) = a \cdot x \cdot \frac{x-c}{x+b},$$

gdzie $x \geq c$ oraz $a, b, c > 0$. Wykres funkcji jest postaci:



Rysunek 6.7 Wykres funkcji dla dóbr luksusowych.

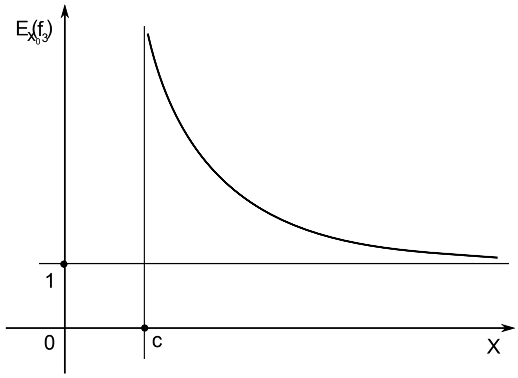
Dobra luksusowe podobnie jak dobra wyższego rzędu nabywane są po osiągnięciu odpowiednio wysokiego poziomu dochodu, który pozwolił zaspokoić potrzeby dóbr niższych rzędów. Widzimy, że

$$T_3'(x) = \frac{a \cdot (x^2 + 2bx - bc)}{(x+b)^2} > 0,$$

a więc funkcja T_3 jest rosnąca w całej swojej dziedzinie (rysunek 6.7). Zauważmy również, że w przeciwieństwie do poprzednich funkcji T_1 i T_2 powyższa funkcja jest nieograniczona. Oznacza to, że wydatki konsumentów na dobra luksusowe rosną wraz ze wzrostem dochodów (coraz szybciej) nieograniczenie, czyli wzrost wydatków staje się wprost proporcjonalny do wielkości dochodu konsumenta.

Elastyczność powyższej funkcji wyraża się wzorem:

$$E_{x_0}T_3 = \frac{x_0(x_0+b)}{ax_0(x_0-c)} \cdot \frac{a(x_0^2+2bx_0-bc)}{(x_0+b)^2} = \frac{x_0^2+2bx_0-bc}{(x_0-c)(x-0+b)}.$$



Rysunek 6.8 Wykres elastyczności funkcji dla dóbr luksusowych.

Z powyższego wykresu (rysunek 6.8) widać, że elastyczność funkcji T_3 jest funkcją malejącą, przyjmującą wartości większe od 1 ($(E_{x_0}f_3) > 1$ dla $x_0 > c$), a więc popyt dla dóbr luksusowych jest zawsze elastyczny. Obliczając granicę $E_{x_0}T_3$ otrzymujemy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x_0^2+2bx_0-bc}{(x_0-c)(x-0+b)} = 1$$

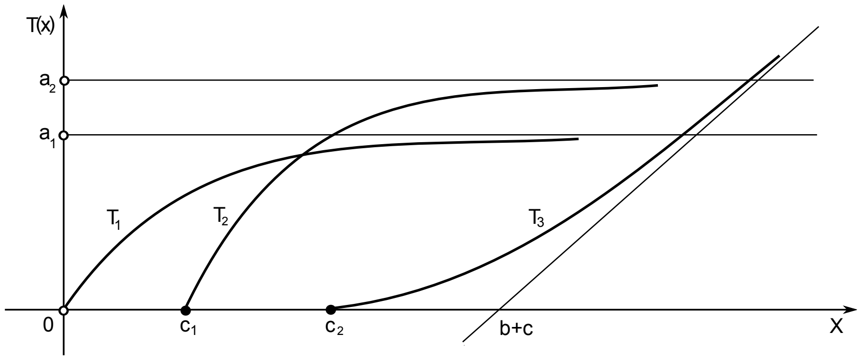
co oznacza, że dopiero dla odpowiednio dużego dochodu konsumenta elastyczność T_3 ma wartość bliską a nawet równą 1. Zatem dla dóbr luksusowych procentowy wzrost dochodów konsumentów o 1% powoduje, wzrost wydatków (popytu) o więcej niż 1% na dane dobro.

6.3.1. Ekonomiczna interpretacja parametrów krzywych Törnquista.

Rozważmy funkcje Törnquista postaci

$$T_1(x) = a_1 \cdot \frac{x}{x+b_1}, \quad \text{gdzie} \quad x > 0 \quad \text{oraz} \quad a_1, b_1 > 0;$$
$$T_2(x) = a_2 \cdot \frac{x-c_2}{x+b_2}, \quad \text{gdzie} \quad x \geq c_2 \quad \text{oraz} \quad a_2, b_2, c_2 > 0;$$
$$T_3(x) = a_3 \cdot x \cdot \frac{x-c_3}{x+b_3}, \quad \text{gdzie} \quad x \geq c_3 \quad \text{oraz} \quad a_3, b_3, c_3 > 0.$$

Przedstawmy na jednym wykresie wszystkie funkcje (krzywe) Törnquista.



Rysunek 6.9 Krzywe T_1, T_2, T_3.

Parametry c_i gdzie $(i = 1, 2, 3)$ są wyznacznikami ***hierarchii pilności potrzeb***, zaś a_i gdzie $(i = 1, 2, 3)$ określają ***poziom ich nasycenia.***

Analizując wykresy funkcji T_1, T_2, T_3 przedstawione na wykresie (rysunek 6.9) widzimy, że przy niskim poziomie dochodów zaspokajane są dobra pierwszej potrzeby, to na nie przeznaczona jest większa ilość wydatków. Jednak wraz ze wzrostem dochodów popyt na dobra podstawowe jest wolniejszy, zmiany te następują aż do poziomu a_1 tzw. poziomu nasycenia.

W przypadku gdy dochód uległ zwiększeniu na tyle, że dobra podstawowe zostały zaspokojone wówczas dochód przeznaczany jest na wydatki dóbr wyższego rzędu. Zatem wydatki te występują dla $x > c_1$ gdzie c_1 jest wartością od której występuje wzrost popytu na dobra wyższych rzędów. Zmiany wielkości tych wydatków dążą do poziomu nasycenia a_2 i ich wzrost jest coraz wolniejszy.

Gdy dochód konsumentów jest na tyle wysoki, że zapewnione są potrzeby na dobra niższych rzędów wówczas mamy do czynienia z wydatkami na dobra luksusowe, czyli $x > c_2$ gdzie c_2 jest wartością od której zaczyna się popyt na dobra luksusowe. W przeciwieństwie do wydatków na dobra niższych rzędów, wydatki na dobra luksusowe wzrastają nieograniczenie stając sie wprost proporcjonalne do dochodów.

Rozdział 7

Modele ekonomiczne.

W ekonomii matematycznej buduje się matematyczne modele ekonomiczne stanowiące przybliżoną reprezentację rzeczywistego zjawiska. Można ogólnie stwierdzić, że model ekonomiczny, to układ równań matematycznych opisujący strukturę pewnego zjawiska.

7.1. Składniki modelu ekonomicznego.

Jak już wspomnieliśmy model ekonomiczny stanowi układ równań. Równania te zawierają trzy rodzaje obiektów:

— zmienne (będziemy na ogół stosować następujące oznaczenia zmiennych: P – cena, π – zysk, R – przychód (utarg), C – koszt, Y – dochód narodowy),

— stałe,

— parametry.

Zmienne. W terminologii ekonomii matematycznej utrwalił się podział zmiennych na:

— *endogeniczne*, inaczej wewnętrzne, których wartość jest determinowana przez dany model,

— *egzogeniczne*, inaczej zewnętrzne czyli określane niezależnie od modelu.

Dokładniejsze znaczenie poszczególnych rodzajów zmiennych zostanie omówione na przykładach w dalszej części wykładu. Już teraz możemy jednak zwrócić uwagę, że pewne zmienne endogeniczne w jednym modelu mogą być egzogeniczne w innym i na odwrót.

Stałe. Wartość stałych nie zmienia się w danym modelu.

Parametry. Są to wielkości, które nie są zmiennymi, ale mogą przyjmować różne wartości w zależności od przyjętych w modelu założeń. Oznaczamy je zwykle $a, b, c, \alpha, \beta\, \gamma$.

Równania występujące w modelu mogą być:

— *definicyjne*, czyli ustalające tożsamości między wielkościami i wyrażeniami. Często w równaniach tych pojawia się zamiast znaku równości znak $\equiv$, np. $\pi \equiv R - C$,

— *behawioralne* – opisujące zachowanie zmiennej w reakcji na zmianę innych zmiennych. Przykładowo, równaniem behawioralnym jest równanie $C = 75 + 10Q$, opisujące koszt C produkcji w zależności od jej wielkości Q.

— *równowagi*, które opisują warunki zachowania pewnej równowagi, np. $Q_d = Q_s$ – popyt jest równoważony przez podaż.

7.2. Modele równowagi statycznej.

Spróbujmy najpierw udzielić odpowiedzi na pytanie: czym jest równowaga? Przyjmijmy za ekonomistą austriackim Fritzem Machlupem, że równowaga jest *„pewną konstelacją wybranych, powiązanych ze sobą zmiennych, tak dopasowanych do siebie, że w modelu, który stanowią nie przeważa żadna tendencja do zmiany”.* Możemy więc krótko powiedzieć, że równowaga, to *brak tendencji do zmiany.*

7.2.1. Częściowa równowaga rynkowa.

Model liniowy dla jednego dobra.

Opis. Załóżmy, że mamy do czynienia z izolowanym rynkiem, w którym występuje tylko jedno dobro. Będziemy badać warunki równowagi popytu i podaży na to dobro w zależności od ceny.

Oznaczenia. Niech
$Q_d > 0$ oznacza wielkość popytu na dobro,
$Q_s > 0$ oznacza wielkość podaży na dobro,
$P > 0$ – cena za jednostkę dobra.

Założenia. Zakładamy, że popyt i podaż zmieniają się liniowo w zależności od ceny. Popyt jest funkcją malejącą ceny, zaś podaż funkcją rosnącą. Dodatkowo, podaż pojawia się począwszy od pewnej ceny minimalnej $P_1 > 0$.

Równania modelu.

$$Q_d = a - bP, \ P \geq 0 \qquad \text{(równanie behawioralne)}$$
$$Q_s = -c + dP, \ P > P_1 \qquad \text{(równanie behawioralne)}$$
$$Q_d = Q_s, \qquad \text{(równanie równowagi)},$$

gdzie parametry $a, b, c, d > 0$.

7.2.2. Keynesowski model dochodu narodowego.

Opis. Rozważmy gospodarkę narodową, w której występują trzy rodzaje wydatków: inwestycje, wydatki rządowe oraz wydatki na konsumpcje.

Oznaczenia. Niech

I_0 – inwestycje (wielkość stała),
G_0 – wydatki rządowe (wielkość stała),
C – wydatki na konsumpcję (zmienna egzogeniczna),
Y – dochód narodowy (zmienna endogeniczna).

Założenia. Zakładamy, że wydatki na konsumpcje są liniową funkcją rosnącą dochodu narodowego. Dochód narodowy pokrywa wszystkie (trzy) rodzaje wydatków.

Równania modelu.

$$C = a + bY \qquad \text{(równanie behawioralne)}$$
$$Y = C + I_0 + G_0 \qquad \text{(równanie równowagi)},$$

gdzie parametry $a > 0$, $b \in (0, 1)$.

Interpretacja parametrów.

a – konsumpcja autonomiczna, niezależna od dochodu (wydatki na konsumpcję przy zerowym dochodzie narodowym),

b – krańcowa skłonność do konsumpcji (gdy dochód wzrasta o 1, wydatki na konsumpcje wzrastają o $b < 1$.

Rozwiązania modelu. Punktem równowagi jest konsumpcja $\bar{C}$ przy dochodzie $\bar{Y}$, gdzie

$$\bar{Y} = \frac{a + I_0 + G_0}{1 - b},$$
$$C = \frac{a + b\,(I_0 + G_0)}{1 - b}.$$

7.3. Modele nakładów i wyników Leontiewa

7.3.1. Model statyczny.

Opis. Rozważmy gospodarkę, w której funkcjonuje $n \geq 1$ gałęzi przemysłu. Model bada, jaki powinien być poziom produkcji każdej z n gałęzi, aby całkowity popyt na wytwarzany przez nie produkt był zaspokajany. Wyniki produkcji każdej z gałęzi są potrzebne jako nakłady w innych gałęziach (nie wykluczając jej samej); tłumaczy to nazwę modelu.

Oznaczenia.

X_i – globalna wielkości produkcji $i - tej$ gałęzi $(i = 1, ..., n)$,
x_{ij} – wielkość produkcji $i - tej$ gałęzi zużywana przez $j - ta$ gałąź,
Y_i – wielkość końcowa produkcji $i - tej$ gałęzi – nie zużyta przez gałęzie.

Założenia.

1. Produkcja $i - tej$ gałęzi jest całkowicie bilansowana (równoważona) przez zużycie produkcji w pozostałych gałęziach i wartość produkcji końcowej

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \qquad \text{dla } i = 1, ..., n.$$

2. Wielkość produkcji $i-tej$ gałęzi zużywana przez $j-ta$ gałąź jest proporcjonalna do wielkości produkcji $j-tej$ gałęzi

$$x_{ij} = a_{ij}X_j \qquad \text{dla } i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., n.$$

Parametr a_{ij} nazywa się *współczynnikiem nakładów.*

Równania modelu.

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + Y_i \qquad \text{dla } i = 1, ..., n.$$

Równania te można zapisać w postaci macierzowej.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Przyjmując: $\bar{X} = [X_1, ..., X_n]^T$, $\bar{Y} = [Y_1, ..., Y_n]^T$, $A = [a_{ij}]_{i,j=1,...,n}$ mamy

$$\bar{X} = A\bar{X} + \bar{Y}, \tag{7.1}$$

albo, równoważnie

$$(I - A)\,\bar{X} = \bar{Y}. \tag{7.2}$$

Uwagi.

1. Macierz A nazywa się *macierzą nakładów bezpośrednich*, $X = [x_{ij}]$ *macierzą przepływów międzygałęziowych*, $(I - A)$ *macierzą Leontiewa*, $\bar{X}$ *wektorem produktu globalnego*, zaś $\bar{Y}$ – *wektorem produktu końcowego*.

2. Często wartości X_i, x_{ij} oraz Y_i są wyrażane w jednostkach monetarnych, w tym wypadku wielkości te reprezentują wartości produkcji.

3. Dla $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$

   $$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j},$$

   a ponieważ x_{ij} oznacza wielkość produkcji $i-tej$ gałęzi zużywaną przez $j-tą$ gałąź, więc ekonomicznie uzasadnione jest, by $x_{ij} \leq X_j$, czyli aby $a_{ij} \leq 1$. Co więcej, zauważmy, że ustalonego $j = 1, ..., n$ suma

   $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = X_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

   reprezentuje sumę produkcji wszystkich gałęzi, zużywanych przez $j-tą$ gałąź. Wielkość ta powinna być nie większa niż X_j, w przeciwnym wypadku $j-ta$ gałąź zużywa więcej niż sama produkuje. Zatem

   $$X_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq X_j, \qquad \text{dla } j = 1, ..., n$$

skąd
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1 \qquad \text{dla } j = 1, ..., n$$
Dodatkowo, jeśli $Y_j > 0$, czyli jakaś część produkcji $j - tej$ gałęzi jest niewykorzystana przez pozostałe gałęzie, to
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1.$$

4. W przypadku, gdy wektor produktu końcowego jest niezerowy, mówimy o tak zwanym **modelu otwartym**.

Rozwiązanie modelu. Przy założeniu, że $\det(I - A) \neq 0$, czyli macierz $I - A$ jest nieosobliwa rozwiązaniem modelu przy danej macierzy A oraz danym wektorze produktu końcowego jest wektor produkcji
$$\bar{X} = (I - A)^{-1} \bar{Y}. \tag{7.3}$$

7.3.2. Model dynamiczny.

W przedstawionym w poprzednim podrozdziale modelu statycznym zakładaliśmy, że wartości produkcji, a co za tym idzie wektory $\bar{X}$ i $\bar{Y}$ nie zmieniają się w czasie. Zbadamy teraz własności modelu, który jest pewnym analogonem tego modelu, ale takim, w którym powyższe założenie nie jest spełnione.

Opis. Załóżmy, jak w modelu statycznym, że mamy do czynienia z $n \geq 1$ gałęziami gospodarki. Niech t oznacza czas dyskretny, reprezentujący kolejny numer pewnego okresu, w którym zakładamy, że produkcja poszczególnych gałęzi jest stała. Niech dalej

$X_i(t)$ – globalna wielkości produkcji $i - tej$ gałęzi $(i = 1, ..., n)$ w okresie t,
$x_{ij}(t)$ – wielkość produkcji $i - tej$ gałęzi zużywana przez $j - ta$ gałąź w okresie t,
$Y_i(t)$ – wielkość końcowa produkcji $i - tej$ gałęzi w okresie t

Zakładamy więc, że wektor produkcji globalnej, oraz wielkości produkcji poszczególnych gałęzi zużywanej przez inne gałęzie oraz produkcji końcowej są funkcjami czasu dyskretnego:

$\mathbb{N} \cup \{0\} \ni t \mapsto \bar{X}(t) = [X_1(t), ..., X_n(t)]^T$ – wektor produkcji globalnej,
$\mathbb{N} \cup \{0\} \ni t \mapsto x_{ij}(t)$,
$\mathbb{N} \cup \{0\} \ni t \mapsto \bar{Y}(t) = [Y_1(t), ..., Y_n(t)]^T$ – wektor produkcji końcowej.

W czasie trwania każdego z okresów zakładamy, że spełnione są te same założenia jak w przypadku otwartego modelu statycznego. W szczególności, dla ustalonego t, zachodzą wszystkie własności, łącznie z formułą na rozwiązanie, prawdziwe dla tego modelu. Zakładamy też, że macierz nakładów A jest macierzą stałą (mającą takie same wyrazy dla wszystkich okresów).

Założenia – wyprowadzenie modelu.

1. Zakładamy, że w każdym następnym okresie $t + 1$ chcemy zwiększyć produkcję w stosunku do okresu poprzedniego t. Możemy to uczynić przeznaczając część produktu końcowego $\bar{Y}(t)$ na inwestycje.
   Ustalmy t, zatem
$$\bar{Y}(t) = \bar{S}(t) + \bar{C}(t),$$

gdzie:

$\bar{S}(t)-$ wektor inwestycji, $\bar{S}(t) = [S_1(t), ..., S_n(t)]^T$, tj. produktu, który będzie wykorzystany jako nakład w następnym okresie $t+1$,

$\bar{C}(t)-$ wektor czystego produktu końcowego , $\bar{C}(t) = [C_1(t), ..., C_n(t)]^T$, (nie wykorzystanego w następnym okresie $t+1$ jako nakład w żadnej gałęzi).

2. Zakładamy dalej, że dla każdego $i = 1, ..., n$ $S_i(t)$ jest rozdystrybuowane na inwestycje w każdej z j gałęzi gospodarki ($j = 1, ..., n$), tzn.

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}(t), \qquad \text{dla } i = 1, ..., n, \tag{7.4}$$

gdzie $s_{ij}(t)$ jest wielkością inwestycji $i-tej$ gałęzi przeznaczoną na inwestycje w $j-tej$ gałęzi.

3. Przyjmijmy, że wielkość s_{ij} jest proporcjonalna do wzrostu produkcji globalnej $j-tej$ gałęzi w okresie $t+1$, tzn.

$$s_{ij}(t) = z_{ij}(X_j(t+1) + X(t)) \qquad \text{dla } i = 1, ..., n, \; j = 1, ..., n.$$

gdzie stała z_{ij} jest tzw. współczynnikiem inwestycyjnym. W konsekwencji, wobec (7.4)

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}(t) = \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(X_j(t+1) - X_j(t)) \qquad \text{dla } i = 1, ..., n,$$

czyli

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t+1) - X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t+1) - X(t) \end{bmatrix}$$

Oznaczając macierz współczynników inwestycyjnych przez $Z = [z_{ij}]_{i=1,...,n,\; j=1,...,n}$ mamy

$$\bar{S}(t) = Z \cdot \left(\bar{X}(t+1) - \bar{X}(t)\right).$$

Wykorzystując równanie (7.2) statycznego modelu Leontiewa (w czasie trwania okresu t badany model jest statyczny) dostajemy, że

$$(I-A)\bar{X}(t) = \bar{Y}(t) = \bar{S}(t) + \bar{C}(t) = Z \cdot \left(\bar{X}(t+1) - \bar{X}(t)\right) + \bar{C}(t),$$

$$Z^{-1}(I-A)\bar{X}(t) = \bar{X}(t+1) - \bar{X}(t) + Z^{-1}\bar{C}(t)$$

czyli *równanie dynamicznego modelu Leontiewa*

$$\bar{X}(t+1) = \left(Z^{-1} - Z^{-1}A + I\right)\bar{X}(t) - Z^{-1}\bar{C}(t). \tag{7.5}$$

Rozwiązanie modelu. Załóżmy, że macierze A oraz Z są dane oraz $(I-A)$ i Z są nieosobliwe. Przypuśćmy też, że dane są wielkość początkowego czystego produktu końcowego $\bar{C}(0)$ oraz początkowego wektora inwestycji $\bar{S}(0)$, a co za tym idzie dana jest wielkość początkowego produktu końcowego $\bar{Y}(0) = \bar{S}(0) + \bar{C}(0)$. Wówczas z formuły (7.3) na rozwiązanie statycznego modelu Leontiewa dostajemy

$$\bar{X}(0) = (I - A)^{-1} \bar{Y}(0).$$

Wykorzystując równanie (7.5) mamy

$$\bar{X}(1) = \left(Z^{-1} - Z^{-1}A + I\right) \bar{X}(0) - Z^{-1}\bar{C}(0). \tag{7.6}$$

Znając teraz wartość $\bar{X}(1)$ wektora produkcji globalnej dla okresu $t = 1$ możemy ze wzoru (7.2) obliczyć wartość wektora produkcji końcowej dla tego okresu

$$\bar{Y}(1) = (I - A)\bar{X}(1).$$

W tym momencie możemy znów podjąć decyzję jaką część produktu końcowego $\bar{Y}(1)$ przeznaczamy na inwestycję $\bar{S}(1)$, a jaka będzie stanowić czysty produkt końcowy $\bar{C}(1)$. Pamiętać jednak powinniśmy, że

$$\bar{Y}(1) = \bar{S}(1) + \bar{C}(1),$$

oraz, że wszystkie współrzędne wektorów $\bar{S}(1)$ i $\bar{C}(1)$ powinny być nieujemne. Przy danych wektorach $\bar{X}(1)$ oraz $\bar{C}(1)$ możemy ponownie wyliczyć wartość produktu globalnego dla następnego okresu za pomocą formuły (7.5):

$$\bar{X}(2) = \left(Z^{-1} - Z^{-1}A + I\right) \bar{X}(1) - Z^{-1}\bar{C}(1).$$

Kontynuując to postępowanie generujemy ciąg wektorów produkcji $\left\{\bar{X}(t)\right\}_{t=0}^{\infty}$. Ciąg ten nazywany jest *ścieżką rozwoju gospodarczego*.

Z formalnego punktu widzenia rozwiązaniem dynamicznego modelu Leontiewa jest więc ciąg wektorów produkcji globalnej będący rozwiązaniem równania różnicowego

$$\bar{X}(t+1) = \left(Z^{-1} - Z^{-1}A + I\right) \bar{X}(t) - Z^{-1}\bar{C}(t),$$

z warunkiem początkowym

$$\bar{X}(0) = X_0,$$

gdzie wektor $\bar{C}(t)$ jest określony dla wszystkich $t = 0, 1, \ldots$.

Fakt, że wektor $\bar{C}(t)$ jest z góry dany oznacza, że zaplanowane zostało jaką część produktu końcowego $\bar{Y}(t)$ przeznaczamy na inwestycję $\bar{S}(t) = \bar{Y}(t) - \bar{C}(t)$ dla wszystkich $t = 0, 1, \ldots$. Aby model miał sens ekonomiczny musi być spełniony warunek nieujemności wektora $\bar{S}(t)$ tj. że

$$\bar{C}(t) \leq \bar{Y}(t) = (I - A)\bar{X}(t) \qquad \text{dla } t = 0, 1, \ldots.$$

7.4. Modele dynamiczne z czasem dyskretnym.

Z modelem dynamicznym mieliśmy już do czynienia przy omawianiu modelu Leontiewa. W tym podrozdziale zbadamy kilka klika innych modeli dynamicznych. Najogolniej mówiąc są to modele, w których zmienne są zależne od czasu. Ograniczymy się do sytuacji, w której czas jest czasem dyskretnym reprezentującym numer kolejnego okresu. Tak jak w przypadku modelu Leontiewa w czasie trwania każdego z okresów model jest statyczny a zmiana wartości zmiennych następuje po przejściu do kolejnego okresu. Takie modele są opisane za pomocą równań różnicowych.

7.4.1. Model pajęczyny.

Opis. Model jest modelem dynamicznym z czasem dyskretnym $t = 0, 1, 2, ...$ Rozważamy rynek pewnego, pojedynczego dobra. Celem modelu jest ustalenie takiej ścieżki ceny $\{P(t)\}_{t=0}^{\infty}$ na dane dobro, aby dla każdego okresu popyt całkowicie zaspokoił podaż.

Oznaczenia. Niech

$t = 0, 1, 2, ...$ – kolejny numer okresu,

$Q_s(t)$ – podaż na dobro w okresie t (liczba jednostek dobra poszukiwana przez konsumentów w okresie t),

$Q_d(t)$ – popyt na dobor w okresie t (liczbe jedostek dobra dostarczana przez producentów w okresie t),

$P(t)$ – cena za jednostkę dobra w okresie t.

Założenia.

1. Wilekość popytu $Q_d(t)$ zależy liniowo od ceny $P(t)$ dla tego samego okresu. Zależność jest funkcją malejącą. Zakładmy, że $Q_d(t) \geq 0$.
2. Wielkość podaży $Q_s(t)$ zależy liniowo od ceny $P(t-1)$ z okresu poprzedniego. Zależność jest funkcją rosnącą. Zakładamy, że $Q_s(t) \geq 0$.
3. Liniowy charakter popytu i podaży jest identyczny dla każdego z okresów.
4. W każdym okresie popyt jest całkowicie równoważony przez podaż.

Równania modelu.

$$Q_d(t) = \alpha - \beta P(t) \tag{7.7}$$

$$Q_s(t) = -\gamma + \delta P(t-1) \tag{7.8}$$

$$Q_d(t) = Q_s(t) \tag{7.9}$$

dla $t = 1, 2, ...$, gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ (parametry).

Uwagi.

1. Sytuacja opisywane przez model występuje w rolnictwie , gdzie zasiewy poprzedzają zbiory. Popyt na dany produkt jest zależny od aktualnej ceny, ale podaż, wynikająca z wielkości zasiewów, jest ustalana na podstawie cen z poprzedniego okresu.
2. Aby równania przedstawiały sens ekonomiczny muszą być spełnione warunki nieujmności zmiennych. Warunki te prowadzą do zastrzeżenia, że ścieżka cenowa $\{P(t)\}_{t=0}^{\infty}$ powinna spełniać warunek

$$\frac{\gamma}{\delta} \leq P(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{dla } t = 0, 1, 2, ... \tag{7.10}$$

W szczególności, musi być spełniony warunek

$$\frac{\gamma}{\delta} \leq \frac{\alpha}{\beta} \tag{7.11}$$

lub równoważnie

$$\beta\gamma - \alpha\delta \leq 0 \tag{7.12}$$

Interpretacja parametrów.

α – maksymalna wartość popytu (przy zerowej cenie),

$-\beta$ – krańcowa wartość popytu reprezentująca wrażliwość konsumentów na zmianę ceny,

$-\gamma$ – współczynnik zapewniający dodatniość podaży począwszy od pewnej ceny minimalnej $P_1 \geq 0$,

δ – krańcowa wartość podaży reprezentująca wrażliwość producentów zmianę na ceny.

Rozwiązanie modelu.

Poszukujemy ścieżki ceny $\{P(t)\}_{t=0}^{\infty}$, czyli ciągu spełniającego układ (7.7)-(7.9). Wobec równania równowagi (7.9) i wobec (7.7)-(7.8)

$$\alpha - \beta P(t) = -\gamma + \delta P(t-1),$$

skąd wobec faktu, że $\beta \neq 0$

$$P(t) = -\frac{\delta}{\beta} P(t-1) + \frac{\alpha+\gamma}{\beta}. \tag{7.13}$$

Jest to równanie różnicowe liniowe niejednorodne pierwszego rzędu. Ogół rozwiązań równania jednorodnego jest postaci

$$P_o(t) = c\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t, \qquad t = 0, 1, 2, ...,$$

gdzie c jest dowolną stałą. Szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego poszukujemy wśród rozwiązań stałych

$$P_s(t) = k,$$

zatem

$$k = -\frac{\delta}{\beta} k + \frac{\alpha+\gamma}{\beta},$$

skąd

$$k = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta},$$

gdyż $\beta + \delta > 0$. Stąd, ogół rozwiązań równania (7.13) jest postaci

$$P(t) = c\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}, \qquad t = 0, 1, 2, ...$$

Jeśli znamy wartość $P(0) = P_0$, to

$$P(0) = c + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta},$$

W konsekwencji rozwiązaniem równania (7.13) z warunkiem początkowym $P(0) = P_0$ jest ścieżka cenowa

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}, \qquad t = 0, 1, 2, ... \tag{7.14}$$

Uwaga. Aby rozwiązanie miało sens ekonomiczny należy założyć, że $P(t)$ spełnia warunek (7.10). Należy przynajmniej zadbać, aby $\frac{\gamma}{\delta} \leq P_0 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

Dalsza analiza modelu – własności ścieżki cenowej.

1. Jeśli $P_0 = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+d}$, to
$$P(t) = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+d}, \qquad t = 0, 1, 2, ...$$
Mamy wtedy do czynienia z rozwiązaniem stałym. Zauważmy, że z warunku (7.12) wynika, że $\frac{\gamma}{\delta} \leq P(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}$ dla $t = 0, 1, 2, ...$ (ćwiczenie). Model jest tożsamy ze statycznym modelem równowagi omawianym w jednym z poprzednich podrozdziałów.

2. Załóżmy, że $P_0 > \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ (ze względu na sens ekonomiczny nie może zajść sytuacja $P_0 < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+d}$). Rozważmy trzy przypadki.

   (a) $\frac{\delta}{\beta} < 1$. Wtedy ścieżka $\{P(t)\}_{t=0}^{\infty}$ jest ciągiem zbieżnym do $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+d}$.

   (b) $\frac{\delta}{\beta} = 1$. Wtedy ścieżka $\{P(t)\}_{t=0}^{\infty}$ jest postaci
   $$P(t) = \begin{cases} P_0 & \text{gdy} \quad t \text{ jest parzyste} \\ 2\frac{\alpha+\gamma}{\beta+d} - P_0 & \text{gdy} \quad t \text{ jest nieparzyste} \end{cases}.$$
   ścieżka oscyluje więc wokół wartości $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+d}$.

   (c) $\frac{\delta}{\beta} > 1$. ścieżka jest ciągiem rozbieżnym – począwszy od pewnego t traci sens ekonomiczny.

Powyższą analizę można przedstawić graficznie za pomocą tzw. diagramu schodkowego. Kształt otrzymanego diagramu jest wyjaśnieniem nazwy modelu (ćwiczenia).

Skorowidz