

MATEMATYKA EKONOMICZNA

LISTA 4

Zad. 1. Niech zmienne losowe X i T_x oznaczają odpowiednio czas trwania życia noworodka oraz przyszły czas życia x -latka. Zinterpretować poniższe zapisy i rozstrzygnąć, które są równoważne:

- | | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|------------------|-------------------------------|
| a) $\Pr(X \leq x)$ | b) $\Pr(X > x)$ | c) $s(x), s(t)$ | d) $F(z) - F(x)$ |
| e) $\Pr(x < X \leq z)$ | f) $s(z) - s(x)$ | g) X | h) $\Pr(T_x > t)$ |
| i) $\Pr(T_x \leq t)$ | j) $\Pr(x < X \leq z X > x)$ | k) T_0 | l) $\frac{s(x) - s(z)}{s(x)}$ |
| m) $\Pr(T_0 > t)$ | n) $\Pr(X > x + t X > x)$ | o) ${}_tq_x$ | p) ${}_tp_x$ |
| r) $\Pr(T_0 > x + t T_0 > x)$ | s) $\Pr(u < T_x \leq u + t)$ | t) ${}_tp_{x+u}$ | u) ${}_tq_{x+u}$ |
| v) $\Pr(T_x > u + t T_x > u)$ | w) $\Pr(T_x \leq u + t T_x > u)$ | z) ${}_u tq_x$ | |

Zad. 2. Obliczyć prawdopodobieństwo zgonu w ciągu roku osoby 50 letniej, jeśli funkcja trwania życia dana jest wzorem:

$$s(x) = 1 - \frac{x}{c}, \quad 0 \leq x \leq c.$$

O ile razy wzrośnie prawdopodobieństwo zgonu tej osoby w ciągu t lat?

Zad. 3. Zakładając, że jest spełnione: $\Pr(T_x > t) \equiv \Pr(T_0 > x + t | T_0 > x)$ (hipoteza jednorodnej populacji) pokazać, że:

- ${}_tp_0 = s(t)$
- ${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$
- $\mu_t = \mu \Rightarrow q_x = 1 - \exp(-\mu)$
- $\mu_{x+t} = \mu \Rightarrow {}_tp_x = \exp(-\mu t)$

Zad. 4. Pokazać, że gęstość zmiennej losowej T_x można wyrazić jako iloczyn funkcji przeżycia ${}_tp_x$ i natężenia zgonów μ_{x+t} - czyli $f_x(t) = {}_tp_x \mu_{x+t}$.

Zad. 5. Mając daną funkcję natężenia zgonów:

$$\mu_x = \frac{1}{100 - x}, \quad x < 100$$

obliczyć prawdopodobieństwo, że 40 latek przeżyje więcej niż 10 lat. (Wskazówka: wiemy, że $\mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)}$, więc $\mu_{x+t} = -\frac{\partial \log(1 - F_x(t))}{\partial t}$. Wystarczy scałkować obustronnie)

Zad. 6. Natężenie zgonów opisuje funkcja $\mu_x = x/100$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że osoba w wieku 15 lat umrze między 35 a 45 rokiem życia. Dodatkowo narysować wykres zależności tego prawdopodobieństwa od wieku osoby.

Zad. 7. Zinterpretować poniższe wzory:

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \tag{1}$$

$${}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \tag{2}$$

$${}_u|1q_x \equiv {}_u|q_x = \frac{l_{x+u} - l_{x+u+1}}{l_x} = \frac{d_{x+u}}{l_x} \tag{3}$$

$${}_u|tq_x = \frac{l_{x+u} - l_{x+u+t}}{l_x} = {}_up_x - {}_{u+t}p_x \tag{4}$$

Zad. 8. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że osoby w wieku: 10, 30, 50 i 70 lat przeżyją więcej niż 10 lat, jeśli rozkład trwania życia osoby nowo narodzonej podlega prawu Gompertza, o funkcji trwania życia:

$$s(x) = \exp \left[-\frac{B}{\ln c} (c^x - 1) \right], \quad B > 0, \quad c > 1, \quad x \geq 0.$$

Do obliczeń przyjąć oszacowania parametrów $B = 5.2967 * 10^{-5}$ i $c = 1.0926$. Porównać obliczenia z tablicami trwania życia (dokonać ponownego obliczenia na nich podstawie).